Comprendiendo las Matemáticas Financieras

Act. Rubén O. López Haro
harorub69@hotmail.com

Arturo E. López Haro
aelopezh@gmail.com

Tercera edición 2021

D.R.® Rubén Octavio López Haro
27 poniente 510 - 4
Barrio de la Magdalena.
San Pedro Cholula
C.P. 72760

ISBN

Copyright©2021
All rights reserved

Hecho en México
Printed in Mexico

Prólogo

En un mundo globalizado donde las decisiones financieras cobran una gran relevancia, es imprescindible para toda persona conocer los fundamentos del manejo del dinero a través del tiempo. Ya sea que quieras desarrollar un plan de financiamiento para tus clientes, que busques medir el impacto de la inflación en tu poder adquisitivo, o bien, que quieras decidir entre diferentes planes de financiamiento para la compra de un automóvil, es preciso que tengas nociones claras de Matemáticas Financieras para tomar decisiones, que a la larga te ubiquen a ti y a tu empresa en una mejor posición financiera.

Este libro te ayudará a entender cómo funciona una tasa de interés, a manejar la inflación y a determinar ganancias reales. Podrás desarrollar diferentes planes de financiamiento donde se involucren 2 o más pagos, con las características especificadas.

Se explican a través de ejemplos cotidianos, diferentes tipos de financiamiento y cómo calcular la tasa de interés o los pagos involucrados en dichos planes.

A través de casos podrás incursionar en el mundo de los Cetes, manejarás las Udis, podrás calcular el monto acumulado en un plan de pensiones, y la manera en cómo la inflación ha impactado en tu poder adquisitivo.

En el libro se exponen de manera clara más de 150 ejemplos que te facilitarán la comprensión de las ideas expuestas, además, al final de cada capítulo se presentan ejercicios cuyas soluciones aparecen al final del libro.

Sin más preámbulo, te invitamos a que te sumerjas en la lectura de este libro para que tomes el control de tus finanzas.

Los autores.

CONTENIDO

1 VALOR DEL DINERO A TRAVÉS DEL TIEMPO 1

1.1 Introducción. 1
1.2 Intereses y tasa de interés. 3
1.3 Justificación de la tasa de interés. 6
1.4 Cálculo de la tasa de interés por periodo. 9
1.5 Pérdida o ganancia real de la tasa de interés. 10
CASO DE ESTUDIO 16
Ejercicios. 19

2 INTERÉS SIMPLE 22

2.1 Introducción y conceptos. 22
2.2 Monto, valor acumulado o valor futuro 23
2.3 Valor presente, valor actual o capital. 28
2.4 Interés y tasa de interés. 29
2.5 Plazo o tiempo. 33
2.6 Tiempo real. 35
2.7 Interés comercial. 36
2.8 Ecuaciones de valor 38
2.9 Intereses Moratorios. 49
CASO DE ESTUDIO 51
Ejercicios 53

3 DESCUENTO 58

3.1 Introducción. 58
3.2 Tasa de descuento. 58
3.3 Relación entre la tasa de interés y la tasa de descuento. 63
3.4 Valor presente con tasa de descuento. 69
3.5 Monto o valor futuro con tasa de descuento. 74
3.6 Comisiones y descuentos. 77
CASO DE ESTUDIO 85
Ejercicios 86

4 INTERÉS COMPUESTO 90

4.1 Introducción y conceptos..... 90
4.2 Monto, valor acumulado o valor futuro. 91
4.3 Valor presente o capital..... 97
4.4 La incógnita es el tiempo..... 98
4.5 Tasas equivalentes. 101
4.6 Tasas nominales. 106
4.7 Ecuaciones de valor con interés compuesto. 111
4.8 Tasa instantánea o fuerza de interés. 115
4.9 Interés compuesto con tasas diferentes. 122
4.10 Inflación. 125
CASO DE ESTUDIO 135
Ejercicios..... 138
APÉNDICE..... 144

5 ANUALIDADES 146

5.1 Introducción..... 146
5.2 Supuestos. 146
5.3 Valor presente de una anualidad. 147
5.4 Valor futuro de una anualidad. 159
5.5 Algunas observaciones acerca del valor presente y valor futuro de las anualidades. 165
5.6 Anualidades vencidas, anticipadas y diferidas. 169
5.7 Relación entre anualidades vencidas y anticipadas. 176
5.8 La incógnita es el número de pagos "n". 182
5.9 La incógnita es la tasa de interés. 193
5.10 Perpetuidades. 207
5.11 Problemas varios..... 211
CASO DE ESTUDIO 219
Ejercicios..... 221

6 TABLAS DE AMORTIZACIÓN 231
6.1 Introducción. 231
6.2 Construcción de una tabla de amortización. 231
6.3 Saldo Insoluto 236
6.4 Casos más generales 249
6.5 Fondos de acumulación 255
CASO DE ESTUDIO 261
Ejercicios 264

7 ANUALIDADES CRECIENTES 269

7.1 Introducción. 269
7.2 Anualidades que crecen como progresión geométrica. 271
7.3 Casos más generales de anualidades creciendo como progresión geométrica. 281
7.4 Perpetuidades 290
CASO DE ESTUDIO 295
Ejercicios 298

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS 302

CAPÍTULO **1**

VALOR DEL DINERO A TRAVÉS DEL TIEMPO

1.1 Introducción.

Todos los bienes o servicios que existen en una economía poseen un valor que comúnmente está determinado por su precio. Un pantalón por ejemplo, de acuerdo a sus características propias como son la marca, la calidad, la moda, etc. tiene un precio que refleja dichas características. Así mismo, el servicio prestado por un técnico al reparar un refrigerador tiene un precio que depende de la falla, de la oportunidad en el servicio, del prestigio del técnico, etc.

En los dos ejemplos anteriores, como en la mayoría de los bienes y servicios, el precio está medido en términos monetarios; pero no todos los bienes y servicios se pueden cuantificar explícitamente en estos términos, tal es el caso del dinero. El dinero es un bien y como tal posee un valor, lo que nos llevaría inmediatamente a preguntarnos ¿cuánto vale el dinero? La respuesta en principio parece no ser clara, porque ¿cómo podemos medir el dinero en términos de dinero? Si tomamos como base la función principal del dinero que es la de intercambio, entonces **el valor del dinero puede considerarse como la capacidad que tiene éste de ser intercambiado por otros bienes.** Entre mayor sea el número de bienes que se puedan intercambiar o comprar con el dinero, mayor será su valor.

Puesto que los precios no son fijos y van cambiando conforme transcurre el tiempo, por una misma cantidad de dinero tú no puedes comprar lo mismo hoy que dentro de dos años. Lo anterior refleja el hecho de que el valor del dinero va cambiando con el tiempo.

Ejemplo 1.1 El año pasado una persona depositó en su alcancía $300, misma cantidad que ha mantenido hasta la fecha, así mismo, el año pasado un pantalón valía $300, y en estos momentos, ese mismo pantalón cuesta $350. Dicha persona tiene la misma cantidad de dinero hoy que el año pasado, pero no

puede comprar exactamente lo mismo ya que los bienes van cambiando de precio. Por esta razón se dice que **el valor del dinero va cambiando con el tiempo.**

En el ejemplo 1.1 aunque el valor intrínseco del pantalón se mantiene, es decir, su calidad, el uso que se le puede dar, la marca, etc. (se supone que el pantalón no ha pasado de moda), su precio sí cambia, esto es, para comprar exactamente lo mismo se debe contar con más dinero conforme vaya transcurriendo el tiempo.

Con las ideas anteriores podemos deducir que el dinero puede ser medido de dos formas distintas, ya sea mediante un valor real o mediante un valor nominal. **El valor real del dinero es el número de bienes que pueden ser comprados por una cantidad determinada**, mientras que **el valor nominal del dinero es el número impreso en el billete o moneda, mismo que no cambia al pasar el tiempo**. Para apreciar lo anterior considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2 El año pasado una persona tenía $1,200 y un pantalón costaba $300. Hoy, ese mismo pantalón cuesta $400 y la persona tiene sus mismos $1,200. ¿Cuál es el valor real y nominal de sus $1,200 hace un año? ¿Cuál es el valor real y nominal de sus $1,200 hoy?

Hace un año la persona podía comprar 4 pantalones con su dinero, por lo que el valor real de $1,200 era de 4 pantalones, mientras que el valor nominal de su dinero era de $1,200.

Hoy, dicha persona tiene sus $1,200 originales, por lo que **en términos nominales tiene lo mismo** que el año pasado. Ahora bien, con sus $1,200 ahora se pueden comprar sólo 3 pantalones, por lo que **el valor real de su dinero disminuyó.**

Nótese entonces que cualquier cantidad de dinero, ya sean $1,200, $5,000 ó $31,000 poseen el mismo valor nominal aún cuando transcurra el tiempo. Lo que es importante observar es que el mismo valor nominal posee distintos valores reales en el tiempo.

Para que se hubiera mantenido el valor real de $1,200 de hace un año, se debieron haber tenido $1,600 hoy para poder comprar exactamente los mismos 4 pantalones. De esta forma **$1,200 de hace un año y $1,600 de hoy aunque tienen valores nominales distintos, poseen el mismo valor real**.

Con los ejemplos 1.1 y 1.2 podemos concluir que en presencia de inflación mientras el dinero conserva su valor nominal, **en términos reales el dinero va perdiendo valor con el tiempo**, ya que con la misma cantidad, conforme pasa el tiempo, se pueden comprar cada vez menos cosas.

El hecho de que el dinero pierde valor con el tiempo es un concepto fundamental en el estudio de las matemáticas financieras, y es necesario tener muy presente que una cantidad de dinero no vale lo mismo si se sitúa en diferentes momentos en el tiempo. Es preferible tener $500 en este momento que tener esa cantidad

dentro de dos años. Nominalmente es lo mismo, pero en términos reales se pueden comprar más bienes en este momento con esos $500 que si los tuviera una vez transcurridos los dos años.

Dado que el dinero pierde valor con el tiempo ¿qué esperaría una persona que presta su dinero en este momento? Lo mínimo que esperaría es que con lo que le devuelvan pueda comprar lo mismo que compra ahora, es decir, que en términos reales el valor de su dinero se mantenga.

El problema ahora es saber cómo debe cambiar el valor nominal del dinero en el tiempo para que se mantenga su valor real. Más adelante se analizarán las variables que influyen en el cambio del valor nominal del dinero para mantener su valor real.

1.2 Intereses y tasa de interés.

Los intereses son los pesos o cantidad de dinero que está dispuesta a pagar aquella persona que pide un préstamo (prestatario), por hacer uso del dinero del prestamista. Es común en la práctica que algunos inversionistas depositen su dinero en instituciones financieras con la promesa de que se les devolverá una cantidad mayor, cantidad que estará basada en una tasa de interés. Regularmente en un préstamo la cantidad que se devuelve es mayor a la prestada, la diferencia entre ellas son los intereses que está dispuesto a pagar el prestatario.

La tasa de interés es el porcentaje que se paga por peso invertido o prestado en un periodo determinado. Si se cobra un 30% de interés anual significa que por cada peso invertido, al año se recibirán $0.30 por concepto de intereses. La tasa de interés puede ser considerada indistintamente como un porcentaje (30%) o bien como una fracción (0.30).

Ejemplo 1.3 Se invierten $3,000 a una tasa de interés del 20% anual. Si el dinero se retira al año, encontrar los intereses generados y la cantidad que se retira al final del año.

Dado que la tasa es de un 20% se sabe que por cada peso invertido se pagarán 20 centavos, en este caso se invierten $3,000 por lo que los intereses generados por esta cantidad son:

$$(3{,}000)(0.20) = 600$$

La cantidad que se retira al final del año es la inversión inicial más los intereses:

$$3{,}000 + 600 = 3{,}600$$

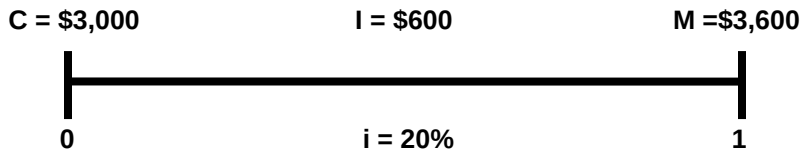
El ejemplo 1.3 servirá para introducir parte de la nomenclatura utilizada de aquí en adelante: la cantidad invertida se conoce con el nombre de **capital inicial o capital** y se denota por ***"C"*** (C=$3,000), la cantidad recibida al final del periodo de inversión es conocido con el nombre de **monto** y se denota por **"M"**

(M=$3,600), la diferencia entre el monto y el capital son los intereses generados y se denotan por **"I"** (I=$600), y finalmente la tasa de interés ofrecida se denota por **"i"** (i=20% ó i=0.20).

En la figura 1.1 se muestra un diagrama de tiempo donde se aprecian gráficamente las variables mencionadas.

Un diagrama de tiempo es una representación gráfica de una operación que involucra una tasa de interés. Los elementos que componen un diagrama de tiempo son: una línea horizontal que representa el tiempo transcurrido en la transacción o **plazo**, el capital está representado al inicio de la línea indicando el comienzo de la operación, mientras que el monto está representado al final indicando la culminación de la misma.

FIG. 1.1



Los intereses en el ejemplo 1.3 se calcularon multiplicando el capital por la tasa de interés expresada como fracción; mientras que el monto se obtuvo de sumarle al capital los intereses generados. De manera general se tiene que en un periodo:

$$I = Ci \qquad \textbf{1.1}$$

y

$$M = C + I \qquad \textbf{1.2}$$

Sustituyendo la ecuación 1.1 en la 1.2 se puede obtener una relación donde se calcule directamente el monto:

$$M = C + I = C + Ci = C(1 + i)$$

entonces:

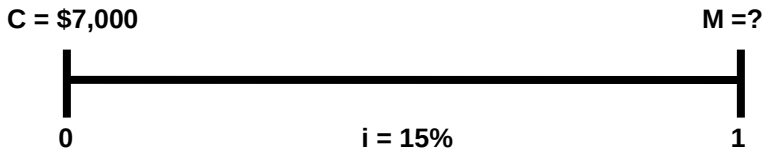
$$M = C(1+i) \qquad \textbf{1.3}$$

Donde:

- **C** : capital inicial.
- **i** : tasa de interés.
- **M** : monto.

Ejemplo 1.4 Para un préstamo de $7,000 encontrar la cantidad que será devuelta a los 6 meses y los intereses cobrados si la tasa de interés es del 15% semestral.

Utilizando un diagrama de tiempo se tiene:



En este ejemplo se pide la cantidad que será devuelta ó el monto. Utilizando la ecuación 1.3 se tiene:

$$M = C(1+i) = 7{,}000(1+0.15) = 8{,}050$$

Los intereses generados se pueden obtener de la ecuación 1.1:

$$I = Ci = (7{,}000)(0.15) = 1{,}050$$

o bien restando del monto el capital:

$$I = M - C = 8{,}050 - 7{,}000 = 1{,}050$$

Ejemplo 1.5 Se sabe que por una deuda contraída el mes pasado, se pagaron por concepto de intereses $24 durante el mes, donde se cobró una tasa de interés del 3% mensual. Encontrar el capital originalmente prestado y el monto.

Los intereses se obtienen de multiplicar la tasa de interés por el capital, esto es, utilizando 1.1 se tiene:

$$I = Ci \quad \text{entonces} \quad C = \frac{I}{i} = \frac{24}{0.03} = 800$$

y

$$M = C + I = 800 + 24 = 824$$

1.3 Justificación de la tasa de interés.

Dado lo cotidiano de una operación de préstamo rara vez reflexionamos en el hecho del por qué se paga una tasa de interés. Las razones principales son tres:

1. Para compensar la pérdida de valor que tiene el dinero con el tiempo. Dado que el dinero pierde valor con el tiempo, un inversionista esperaría que una vez transcurrido el plazo del préstamo, tuviera al menos una cantidad suficiente para poder comprar o consumir exactamente lo mismo que al principio de la transacción. La pérdida de valor del dinero está ligada con la inflación. **La inflación es el cambio generalizado en precios que experimentan los bienes de una economía.** A mayor inflación mayor pérdida de valor del dinero y por ende mayor será la tasa de interés que exija un inversionista.
2. Por el sacrificio que realiza el prestamista al posponer el uso de su dinero. Una persona que necesita recursos y no los tiene, se ve en la necesidad de solicitar un préstamo, situación que conoce el prestamista, por lo que el inversionista al ceder el uso de su dinero y perder la ocasión de gastarlo en este momento, debe cobrar un **costo de oportunidad**.
3. Por el riesgo de no pago o riesgo de incumplimiento que enfrenta el prestamista. Cuando una persona o institución presta dinero, no tiene plena certeza de que le sea devuelto por lo que hay un riesgo que debe ser cuantificado y cobrado al prestatario.

Es así como una tasa de interés no sólo debe medir el valor del dinero a través del tiempo, sino que otorga generalmente un beneficio extra; por lo que si se invierte una cantidad a una tasa de interés, al recibir el monto se debe tener un mayor valor real, debido a la influencia del costo de oportunidad y del riesgo de no pago. En el caso de un individuo que invierte su dinero, intercambia su consumo presente (no gasta su dinero ahora), con la esperanza de recibir en términos reales una cantidad superior y así poder consumir o gastar más en el futuro.

La cuantificación del costo de oportunidad y del riesgo de no pago son temas que están fuera del alcance de este libro, pero hay que tener presente que al cobrarse una tasa de interés, ésta debería ser superior a la inflación por el efecto de estos factores.

Dado que el valor nominal del dinero debe modificarse en el tiempo para poder comprar los mismos bienes, y a su vez el valor de los bienes está en función de la inflación, entonces podemos inferir que **la inflación es el parámetro que mide los cambios que debe experimentar el valor nominal del dinero para mantener constante su valor real**.

Al invertir cierta cantidad de dinero, si la tasa de interés es superior a la inflación entonces se tendrá un mayor valor real en el futuro, mientras que si la tasa de interés está por debajo de la inflación el valor real será menor.

La inflación se denotará con la variable π (letra griega pi) y al ser una tasa de crecimiento se puede manejar como una tasa de interés. De esta manera para calcular el precio final de un artículo considerando la inflación sería:

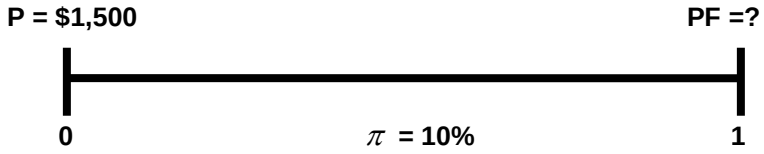
$$PF = P(1+\pi) \qquad \textbf{1.4}$$

Donde:

- **P** : precio del bien al inicio del periodo
- π : inflación experimentada en el periodo
- **PF** : precio al final del periodo del bien

Ejemplo 1.6 El día de hoy se puede comprar una chamarra por la cantidad de $1,500 y se espera que la inflación sea del 10% para el siguiente año. ¿Cuánto se deberá tener en un año para poder comprar la misma chamarra?

Se puede utilizar un diagrama de tiempo para ver el cambio en el precio de la chamarra.



El precio de la chamarra puede obtenerse considerando la inflación esperada del periodo. Usando la relación 1.4:

$$PF = P(1+\pi) = (1{,}500)(1+0.10) = 1{,}650$$

El precio de la chamarra al finalizar el año es de $1,650, por lo que $1,500 hoy y $1,650 dentro de un año sirven para comprar lo mismo.

En el ejemplo 1.6 se puede observar que $1,500 hoy y $1,650 dentro de un año sirven para comprar exactamente la misma chamarra por lo que se dice que para una inflación del 10%, $1,500 hoy y $1,650 dentro de un año tienen el mismo valor real, aunque sus valores nominales sean distintos.

Ejemplo 1.7 Tomando como referencia el ejemplo 1.6. Si el banco ofreciera una tasa de interés del 14% anual e invirtieras tu dinero hoy,

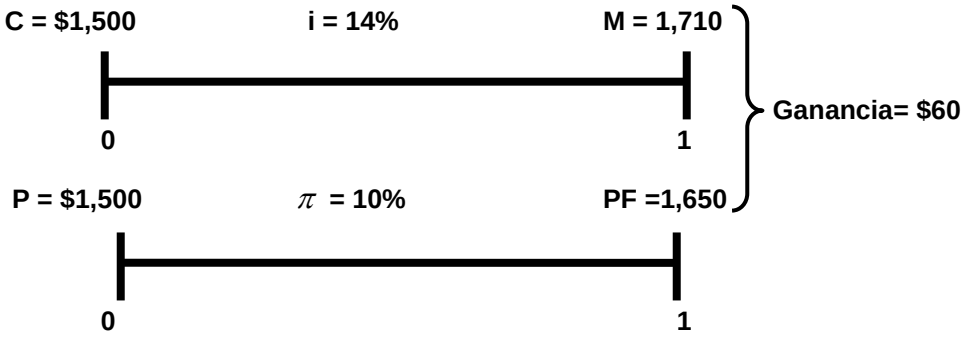
a) ¿tendrías un valor real mayor en un año?

b) ¿qué pasaría si el banco ofreciera una tasa del 5% anual?

a) Si invirtieras los $1,500 a una tasa del 14% anual tendrías al final del año:

$$M = C(1+i) = 1{,}500(1+0.14) = 1{,}710$$

Gráficamente:

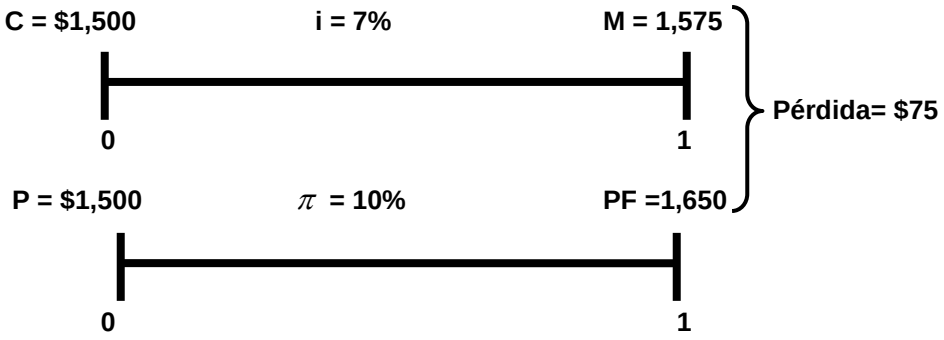


Al invertir tu dinero a una tasa de interés superior a la inflación tendrás una cantidad mayor que el precio de la chamarra al final del año. Se dice entonces que existirá un mayor valor real ya que podrás comprar la chamarra y además te sobrarán $60.

b) Si el banco ofreciera una tasa del 7% anual la cantidad acumulada sería:

$$M = C(1+i) = 1{,}500(1+0.05) = 1{,}575$$

Gráficamente:



Al invertir el dinero a una tasa inferior a la inflación se tendrá un menor valor real. En este caso tienes una pérdida nominal de $75.

Podemos concluir del ejercicio anterior que cuando se invierte a una tasa inferior a la inflación, entonces hay una pérdida en términos reales, mientras que si se invierte a una tasa superior a la inflación entonces se tiene una ganancia en términos reales.

1.4 Cálculo de la tasa de interés por periodo.

Cuando se habla de un préstamo donde se conocen únicamente los intereses cobrados, se tiene información incompleta acerca de la conveniencia del mismo. Supongamos que se conoce únicamente que los intereses generados por un capital fueron de $50 en un año. Si el préstamo hubiera sido pequeño, digamos de $50, los intereses habrían duplicado el capital y pudieran ser muy atractivos para el prestamista, mientras que si el préstamo hubiese sido considerable, digamos de $50,000, los intereses hubieran sido insignificantes en relación al capital y por ende, la transacción no hubiera sido muy favorable para el prestamista.

De lo anterior deducimos que para identificar la conveniencia de una inversión es necesario establecer tanto los intereses como el capital inicial invertido. A partir de los intereses se puede calcular la tasa de interés. **La tasa de interés es el mejor parámetro para medir si el financiamiento de un préstamo es caro o es barato**.

Para obtener la tasa de interés por periodo es necesario calcular el porcentaje que representan los intereses generados del capital inicial. Para calcular este porcentaje solo se dividen los intereses entre el capital invertido al principio del periodo.

La tasa de interés indica la cantidad de dinero que se recibirá por peso invertido, por ejemplo, si la tasa de interés es de un 25% anual, por cada peso invertido se recibirán 25 centavos.

Obsérvese que de la ecuación 1.1 se puede obtener la tasa de interés:

$$i = \frac{I}{C}$$

pero sabemos que $I = M - C$ por lo que se tiene:

$$i = \frac{M - C}{C} \qquad \textbf{1.5}$$

De esta manera podemos definir **la tasa de interés por periodo** como el cociente entre los intereses generados en ese periodo y el capital invertido al principio del mismo.

Ejemplo 1.8 Calcular la tasa de interés anual cobrada si para un préstamo de $300 se devuelven $350 al finalizar un año.

Utilizando la ecuación 1.5:

$$i = \frac{M - C}{C} = \frac{350 - 300}{300} = \frac{50}{300} = 0.1667 = 16.67\%$$

Por lo tanto la tasa de interés anual es del 16.67%

En palabras, la tasa de interés es la diferencia de lo que se tiene al final del periodo menos lo que se tiene al principio, dividido entre lo que se tiene al inicio del periodo.

La tasa de interés calculada de la manera anterior es una tasa efectiva por periodo. Si el periodo contempla un año como en el ejemplo 1.8 se dice que la tasa es efectiva anual. En el caso en que el préstamo hubiera sido por un semestre entonces la tasa de interés calculada conforme a la ecuación 1.5 sería una tasa efectiva semestral, si el periodo es mensual entonces la tasa resultante es una tasa efectiva mensual.

Existe una estrecha relación entre la forma de calcular la tasa de interés y la inflación, ya que pueden ser calculadas de forma análoga.

Ejemplo 1.9 Un par de zapatos costaban hace 6 meses $320, el día de hoy cuestan $355. ¿Cuál es la inflación experimentada en el precio del par de zapatos?

Para calcular la inflación se procede como en la tasa de interés: se calcula el aumento del precio, y se divide entre el precio inicial.

$$\pi = \frac{355 - 320}{320} = 0.1094 = 10.94\%$$

1.5 Pérdida o ganancia real de la tasa de interés.

Hasta el momento hemos visto que al invertir dinero a una tasa de interés, se va a tener un mayor valor nominal en el futuro, es decir, se va a tener más dinero en cantidad. Además vimos que dependiendo de la inflación se podía tener un valor real mayor en el caso de que la tasa de interés fuera superior a la inflación; un valor real menor en el caso de que la tasa de interés fuera inferior a la inflación, y que sería igual el valor real en el caso de que la tasa de interés fuera igual a la inflación.

En este apartado se analizará de cuánto fue la ganancia o la pérdida en términos reales de una transacción financiera.

Es importante aclarar que como el dinero pierde valor con el tiempo, no valen lo mismo $10,000 hoy que $10,000 dentro de un año, por lo que pesos de hoy no pueden ser comparados directamente con pesos del futuro o del pasado. Para hacer comparaciones de dos cantidades es necesario situarlas en un mismo momento en el tiempo.

Ejemplo 1.11 ¿Qué vale más en términos reales, $500 hoy ó $620 dentro de un año suponiendo que la inflación es del 20% anual?

Directamente no pueden ser comparadas ambas cantidades ya que están situadas en diferentes momentos. Para poder realizar la comparación es necesario situar una de las cantidades en la fecha de la otra. Supóngase que se tiene un artículo que hoy vale $500; con la inflación del 20%, al final del año este artículo costará:

$$500\left(1+0.2\right)=600$$

Lo anterior significa que $500 de hoy tienen el mismo valor real que $600 dentro de un año si la inflación es del 20%, es decir, con $500 de hoy se pueden comprar las mismas cosas que con $600 al cabo de un año. De esta forma podemos concluir que $620 dentro de un año tienen un mayor valor real que $500 de hoy, ya que se va a poder comprar el artículo de $600 y se va a tener un excedente.

Ahora bien, en el caso en que tú tuvieras $200 en este momento y te obsequian $40, ¿en términos porcentuales cuánto dinero tienes extra? En este caso $40 representan un 20% de los $200 que tenías (solo hay que dividir la cantidad extra entre lo que se tenía originalmente), por lo que se dice que tu dinero aumentó en un 20%.

$$\frac{40}{200}=0.20=20\%$$

Para el caso en que tienes tus $200 pero tienes que pagar $60, ¿cuánto tienes de menos después de efectuar el pago? Para calcular el porcentaje que ahora tienes de menos basta dividir los $60 entre los $200 originales, lo que da un 30%. En este caso se dice que tu dinero disminuyó en un 30%.

$$\frac{60}{200}=0.30=30\%$$

En los dos casos anteriores se pudo realizar la comparación del aumento o disminución ya que las dos cantidades estaban situadas en el mismo momento, pero ¿qué sucede si están situadas en diferentes fechas? Para contestar a lo anterior se analizará el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.12 Se invierten $2,000 a una tasa del 7% semestral y se pronostica una inflación del 4% para los próximos 6 meses. Si en este momento un librero que deseas comprar vale los $2,000, pero dejarás transcurrir un semestre para comprarlo. En términos reales, ¿cuál será la ganancia de la inversión al finalizar el semestre?

En el ejemplo se pide la ganancia real de la inversión a los 6 meses, por lo que para poder realizar las diferentes comparaciones es necesario colocar todas las cantidades precisamente al terminar el plazo. Cabe aclarar que **una ganancia real se expresa de manera porcentual.**

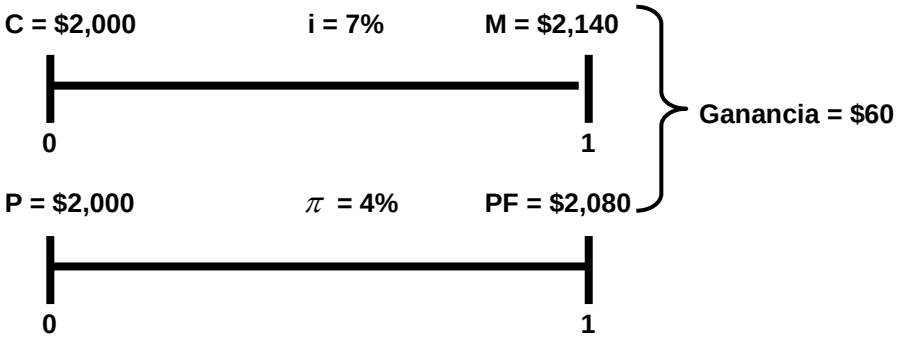
Al invertir los $2,000 a una tasa del 7% semestral dará como resultado:

$$M = 2{,}000\,(1+0.07) = 2{,}140$$

Por otra parte, debe calcularse el valor del librero a los 6 meses con la inflación del 4%, quedando:

$$PF = 2{,}000\,(1+0.04) = 2{,}080$$

Gráficamente se tendría:



Como sabemos, al invertir a una tasa mayor a la inflación se tendrá un mayor valor real al finalizar el periodo; para este ejemplo en particular se puede comprar el librero y existe una ganancia. Ahora bien, ¿realmente cuánto se tiene de más al finalizar el semestre? Como se puede apreciar, al retirar el dinero invertido se tiene para comprar el librero con valor de $2,080 y se tiene una ganancia de $60. La ganancia real se obtiene de dividir los $60 y el valor del librero a los 6 meses que en este caso es de $2,080. Se toma el valor del librero a los 6 meses puesto que la ganancia de $60 está precisamente al finalizar el semestre, y si se quisiera comprar más libreros al final del semestre, el precio al que se podría hacerlo es al de $2,080 y no a los $2,000 iniciales.

Visto de otra forma, los $60 son pesos del final del semestre, que no pueden ser comparados con pesos del inicio, porque ya no valen lo mismo; no se pueden comparar peras con manzanas. Los $2,000 al inicio equivalen a $2,080

del final (sirven para comprar lo mismo), por lo que la ganancia real se expresa como el cociente de la ganancia y el valor del dinero al final del periodo. Para este caso:

$$i_R = \frac{60}{2{,}080} = 0.0288 = 2.88\%$$

Donde i_R es la ganancia o pérdida real. También puede ser vista como una tasa de interés real donde ya se le descontó la inflación.

Este resultado significa que lo que recibirá al final del semestre por la inversión le alcanzará para comprar exactamente lo mismo más un 2.88%, o lo que es lo mismo, el inversionista salió ganando un 2.88% semestral en términos reales.

Nótese que la ganancia real no fue de un 3% como se hubiera podido esperar (7% de la tasa de interés menos el 4% de la inflación).

Ejemplo 1.13 Una televisión costaba el año pasado $4,000 y la inflación en el transcurso del año fue del 15%. Una persona que tenía los $4,000 decidió invertir su dinero a una tasa del 10% anual. Encontrar la pérdida real de su inversión.

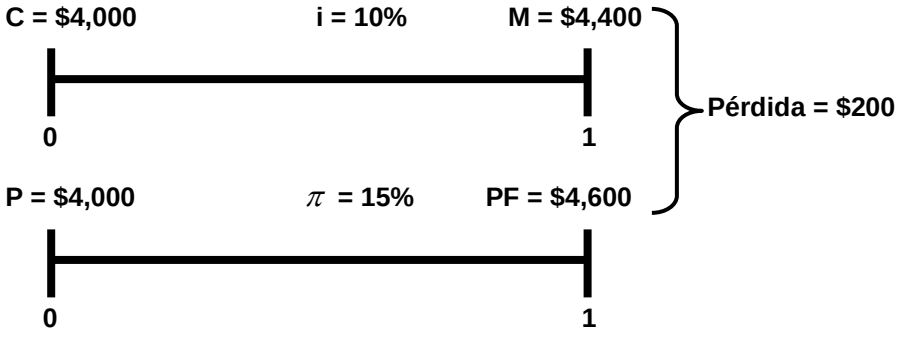
El precio de la televisión hoy con la inflación del 15% es:

$$PF = 4{,}000\,(1 + 0.15) = 4{,}600$$

La cantidad recibida por la inversión al 10% anual fue:

$$M = 4{,}000\,(1 + 0.10) = 4{,}400$$

Gráficamente:



Para este ejemplo se tuvo una pérdida de $200 con la inversión, ya que necesita $4,600 para poder comprar la misma televisión. Para calcular la pérdida en términos reales se necesita dividir la cantidad que falta para comprar la televisión ($200) entre el valor de la misma al finalizar el año ($4,600), es decir:

$$i_R = \frac{-200}{4{,}600} = -0.0435 = -4.35\%$$

El resultado anterior significa que con el dinero recibido se tiene ahora un 4.35% menos de lo que se tenía el año pasado. El signo menos indica pérdida

Ejemplo 1.14 Se ofrece una tasa del 15% mientras que la inflación pronosticada para el mismo periodo es del 11%. ¿Cuál sería la ganancia real esperada por un inversionista?

En este caso no se ofrece la cantidad de dinero que se ha de invertir, por lo que podemos suponer una inversión de $100. Si se invierten los $100 a una tasa del 15% al finalizar el periodo se tendrán:

$$M = 100(1+0.15) = 115$$

Un artículo que hoy vale $100 con una inflación del 11% valdrá:

$$PF = 100(1+0.11) = 111$$

La ganancia nominal que se obtiene es de $4. La ganancia real se obtiene de dividir los $4 entre el precio que tiene el artículo al finalizar el periodo:

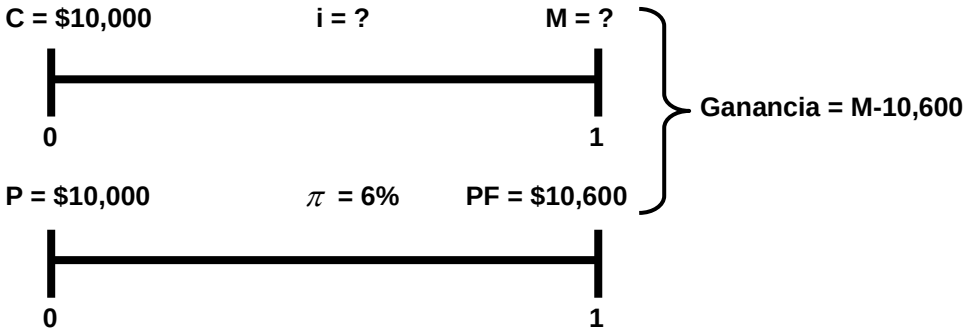
$$i_R = \frac{4}{111} = 0.036 = 3.6\%$$

Cabe mencionar que en los ejercicios anteriores se supuso que los precios individuales se incrementan conforme a la inflación general, supuesto que no necesariamente es cierto.

Ejemplo 1.15 Vas a prestar $10,000 y deseas ganar una tasa real del 10% en un año y supones que la inflación anual será del 6%, ¿qué tasa de interés debes cobrar para lograr tu objetivo?

De manera simple el ejercicio podría resolverse como la suma entre la inflación y la tasa real, pero esto no es cierto, ya que como se vio anteriormente, la ganancia real no es la resta entre la tasa de interés y la inflación.

Para resolver este ejercicio se procederá de la misma manera que los ejercicios anteriores, pero dejando como incógnita la tasa de interés. Véase gráficamente:



No se sabe cuál va a ser el monto al final del periodo ya que no se conoce la tasa de interés porque es precisamente lo que se pide. Un artículo que tiene un precio de $10,000 al final del año costará $10,600. Entonces la ganancia estará dada por la diferencia entre lo que se recibe con la inversión y lo que cuesta el artículo.

$$\text{Ganancia} = \text{M} - 10{,}600$$

Esta ganancia debe dividirse entre el precio del artículo para obtener el interés real que en este caso es del 10%. Se tiene:

$$\text{i}_\text{R} = 0.10 = \frac{\text{M} - 10{,}600}{10{,}600}$$

Necesitamos despejar el monto, por lo que como el 10,600 está dividiendo:

$$(0.10)(10{,}600) = 1{,}060 = \text{M} - 10{,}600$$

Entonces:

$$\text{M} = 10{,}600 + 1{,}060 = 11{,}660$$

De esta forma sabemos que el monto que debes cobrar para tener una tasa real del 10% es de $11,660, prestando un capital de $10,000. De la ecuación 1.5 se sabe que:

$$\text{i} = \frac{\text{M - C}}{\text{C}} = \frac{11{,}660 - 10{,}000}{10{,}000} = \frac{1{,}660}{10{,}000} = 0.1660 = 16.60\%$$

Así, para ganar una tasa real del 10%, suponiendo una inflación del 6% se debe cobrar una tasa del 16.60%.

CASO DE ESTUDIO

Pérdida de poder adquisitivo de un trabajador

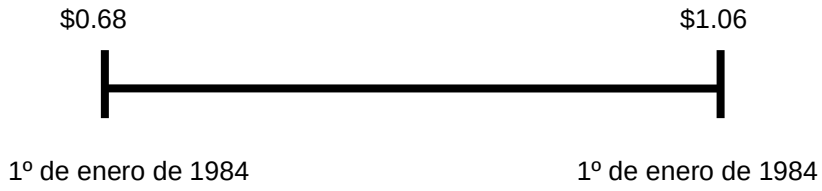
A continuación, se muestra una tabla donde se calcula la ganancia ó pérdida real anual de un trabajador que gana el salario mínimo. El estudio muestra los datos de 1984 al 2009

Año (1)	Salario Mínimo (2)	Incremento salarial (3)	Inflación (4)	Ganancia real (5)
1984	0.68	55.88%	65.92%	-6.05%
1985	1.06	55.66%	66.38%	-6.44%
1986	1.65	84.85%	104.34%	-9.54%
1987	3.05	154.59%	176.83%	-8.03%
1988	7.77	11.27%	34.56%	-17.31%
1989	8.64	16.67%	22.48%	-4.75%
1990	10.08	18.06%	27.11%	-7.12%
1991	11.90	12.02%	17.95%	-5.03%
1992	13.33	7.05%	11.32%	-3.83%
1993	14.27	7.01%	7.50%	-0.46%
1994	15.27	7.01%	10.23%	-2.92%
1995	16.34	23.32%	51.72%	-18.72%
1996	20.15	31.27%	26.44%	3.82%
1997	26.45	14.18%	15.27%	-0.95%
1998	30.20	14.07%	19.02%	-4.16%
1999	34.45	10.01%	11.02%	-0.91%
2000	37.90	6.46%	8.11%	-1.52%
2001	40.35	4.46%	4.79%	-0.31%
2002	42.15	3.56%	5.16%	-1.52%
2003	43.65	3.64%	4.20%	-0.53%
2004	45.24	3.45%	4.54%	-1.04%
2005	46.80	4.00%	3.94%	0.05%
2006	48.67	3.90%	3.98%	-0.07%
2007	50.57	3.99%	3.70%	0.28%
2008	52.59	4.20%	6.28%	-1.95%
2009	54.80			

*Datos obtenidos de www.inegi.gob.mx

En la columna 2 se presenta el salario mínimo al primero de enero de cada año. En la columna 3 se calcula el porcentaje de incremento salarial anual, haciendo notar que como los salarios mínimos están al primero de enero de cada año, al relacionar el salario de 1984 y el de 1985, el incremento contemplado está calculado para 1984. En la columna 4 se muestran las inflaciones presentadas en el año correspondiente, para que finalmente en la columna 5 se calcule la pérdida ó ganancia real para un trabajador que gana el salario mínimo.

Para calcular el incremento salarial de 1984 en la columna 3, se debe considerar el salario al inicio del año que es de $0.68 y el del principio de 1985 que es $1.06. Si observamos el siguiente diagrama podemos ver la analogía entre un incremento salarial y la tasa de interés.



El incremento salarial para todo el año de 1984 estaría dado por:

$$\text{incremento salarial} = \frac{1.06 - 0.68}{0.68} = 0.5588 = 55.88\%$$

De manera análoga se calcularon los incrementos salariales para todos los años.

Para el caso de las inflaciones, el INEGI publica ya las inflaciones anuales para todos y cada uno de los años, por lo que la columna 4 ya tiene la información requerida. Como se puede notar en la tabla, en 1986 y 1987 las inflaciones anuales superaron el 100%; compárense con la inflación de 1995 que fue del 51.72%, donde la crisis provocada en diciembre 1994 por la devaluación del peso tuvo su mayor repercusión.

Para calcular la ganancia ó pérdida real de la columna 5, para el año de 1984 se procede de la siguiente manera:

$$1 + i_r = \frac{1 + \text{incremento}}{1 + \pi} = \frac{1.5588}{1.6592} = 0.9395$$

Despejando la tasa real o ganancia real del salario:

$$i_r = -0.0605 = -6.05\%$$

Por lo que la pérdida de poder adquisitivo de un trabajador solo en 1984 fue del 6.06%. Análogamente se obtuvieron las ganancias reales para el resto de los años.

Nótese que en 1988 y 1995 las pérdidas reales del salario mínimo fueron superiores al 17%.

Otro dato que se puede apreciar es que de los 25 años considerados, en 22 de ellos el salario mínimo experimentó una pérdida, por lo que no es difícil imaginar que en los 25 años estudiados, un trabajador que gana el salario mínimo ha experimentado una pérdida de poder adquisitivo.

El dato exacto de la pérdida acumulada de poder adquisitivo de los 25 años se analizará en el caso de estudio del capítulo 4.

Ejercicios.

1.1 Introducción

1 Un par de anteojos valían el primero de enero $1,000. Seis meses después los mismos lentes valían $1,200.
a) ¿En términos nominales cambió el valor de los lentes? Explicar.
b) ¿En términos reales y tomando como base el precio de los lentes, son diferentes $1,000 del 1o de enero que $1,200 seis meses después? Explicar.

2 ¿Por qué se dice que en términos reales el dinero pierde valor con el tiempo?

1.2 Intereses y tasa de interés

3 Se invierten $10,000 a una tasa de interés del 5% trimestral; si la inversión es por un trimestre, encontrar el monto y los intereses generados.

4 Por un préstamo de $60,000 se cobró una tasa de interés del 12% semestral. Calcular el monto y los intereses recibidos a los 6 meses.

5 Por una deuda se devolvieron en un mes $70 por concepto de intereses. Si la tasa de interés cobrada fue del 3.5% mensual, encontrar la deuda original y el monto recibido.

1.3 Justificación de la tasa de interés

6 Un balón de fútbol cuesta $200 hoy, si la inflación esperada es del 20% anual, ¿cuánto costará el balón en un año?

7 Si el año pasado se tenían $1,300, ¿cuál debe ser el valor nominal de esos $1,300 hoy, para mantener su valor real del año pasado suponiendo una inflación del 25%?

8 Estás pensando en comprar un par de patines que valen $1,500 y tienes dos alternativas: comprarlos el día de hoy, o bien comprarlos dentro de 3 meses invirtiendo los $1,500 en un banco que ofrece una tasa de interés del 4% trimestral. Suponiendo que la inflación para el próximo trimestre será del 3.5%, ¿cuánto ganarías en términos nominales si los compras dentro de 3 meses?

9 Hoy puedes invertir $3,200 a una tasa del 12% semestral y sabes que la inflación para el próximo semestre será del 14%.

a) Encontrar el monto de los $3,200 a los 6 meses.

b) Encontrar el valor nominal que mantiene el valor real de los $3,200 al cabo de los 6 meses.

c) En términos reales ¿dónde tendrías un mayor valor, hoy o dentro de 6 meses si invirtieras un semestre a la tasa del 12% semestral?

10 Hace 3 meses una televisión costaba $3,500 y la inflación en el trimestre fue del 6%, ¿qué cantidad adicional a los $3,500 debe ser agregada hoy, para mantener su valor real de hace 3 meses?

1.4 Cálculo de la tasa de interés por periodo.

11 Por un préstamo de $15,000 que se realizó hace 8 meses se devolvieron $16,500 el día de hoy, calcular la tasa de interés que operó en el periodo considerado.

12 Un automóvil costaba $90,000 hace un año, hoy cuesta $92,500. ¿De cuánto fue la inflación el año pasado?

13 Hace 6 meses una mesa costaba $500 y hoy cuesta $560, ¿cuál debió haber sido la tasa de interés semestral ofrecida por un banco, para haber mantenido constante el valor real del dinero al final del semestre?

14 Al invertir $4,000 se devolvieron $4,075 al cabo de un mes, ¿cuál fue la tasa de interés mensual cobrada?

15 Una inversión produjo intereses por $400, y se devolvieron por la inversión un total de $7,600. ¿Cuál fue la tasa de interés ofrecida?

1.5 Pérdida o ganancia real de la tasa de interés.

16 ¿Qué vale más, $800 hoy o $1,030 dentro de un año si la inflación esperada es del 30% anual?

17 Tú tenías $10,000 el año pasado para tus compras de navidad, en este año tuviste $11,720. Si la inflación fue del 18.75%, ¿con qué cantidad pudiste comprar más?

18 Para los últimos 4 meses el banco ofreció una tasa de interés del 5.5% por todo el periodo, y la inflación total en dicho periodo fue del 7%. Si un artículo costaba $1,300 al principio de los 4 meses y decidiste invertir ese dinero, ¿de cuánto fue la pérdida real en los 4 meses?

19 Se tienen $5,000 para invertir a un plazo de 3 meses. El interés ofrecido es del 6% mientras que la inflación esperada es del 4.5% para dicho plazo. Calcular la ganancia real en la inversión.

20 El año pasado se contó con un presupuesto de $1’300,000, mientras que este año el presupuesto fue de $1’415,000. Si la inflación fue del 24%, ¿de cuánto fue la disminución real del presupuesto?

21 Le vas a prestar dinero a un conocido y estimas que la inflación será del 5% para el próximo año, si deseas ganar una tasa real del 5%, ¿qué tasa de interés le debes cobrar para lograr tu propósito?

Ejercicios tipo Examen

1 Por un préstamo de $5,000 se devolvieron $1,000 por concepto de intereses al cabo de un año, ¿cuál fue la tasa de interés cobrada?

2 Un banco ofrece una tasa de interés menor a la inflación esperada. ¿Qué puedes deducir del valor real de tu dinero si invirtieras en este banco?

3 Los intereses generados por una inversión en 6 meses fueron de $200. Si la tasa de interés ofrecida fue del 10% semestral:
a) ¿cuál es el valor del capital?
b) ¿cuál es el valor del monto?

4. Tienes $2,400 que invertirás a una tasa del 20% anual y la inflación esperada es de un 15%. ¿En qué porcentaje disminuirá o aumentará el valor real de tu dinero al cabo del año?

5 Un banco ofreció una tasa de interés del 18% anual. Si la tasa real que se ganó fue del 3.2%, calcular la inflación del año pasado.

CAPÍTULO **2**

INTERÉS SIMPLE

2.1 Introducción y conceptos.

En el capítulo anterior se estudió la manera de encontrar un monto cuando el capital se invierte a un periodo solamente: si se tenía una tasa semestral se invertía un semestre, si se tenía una tasa anual se invertía a un año, etc. En este capítulo se analizará la forma de encontrar un monto cuando el tiempo de inversión es menor o mayor a un periodo, es decir, si se tiene una tasa semestral se calculará un monto cuando el tiempo es distinto a un semestre.

Para calcular un monto cuando un capital es invertido a un plazo distinto a un periodo se utilizan dos métodos básicamente: el primero de ellos es el interés simple que es el que se desarrollará en el presente capítulo, y el segundo es el interés compuesto que se estudiará en el capítulo 4.

Para el caso del interés simple se realizan los siguientes supuestos:

Supuestos del interés simple:

1 **Los intereses ganados periodo a periodo no son reinvertidos**. Para calcular los intereses en cualquier periodo solo se considerará el capital invertido, es decir, no se ganan intereses sobre los intereses.

2 **Al capital inicial no se le retira ni se le aumenta más capital**. El crecimiento del monto depende exclusivamente de los intereses generados periodo a periodo.

3 **La tasa de interés periodo a periodo es constante**. Si se invierte un capital a tres meses y se cobra una tasa mensual, se supondrá que la tasa es la misma mes con mes para los tres meses.

4 **Los intereses periodo a periodo son constantes.** Como ya se vio en el capítulo anterior la forma de obtener los intereses en un periodo es multiplicando el capital por la tasa de interés ($I=Ci$); en este caso como no se

reinvierten los intereses y no se modifica el capital inicial (supuestos 1 y 2), no cambia la base sobre la cual se han de cobrar los intereses. Además, como la tasa de interés es constante también, luego entonces los intereses periodo a periodo son siempre los mismos.

Ejemplo 2.1 Se invierten $200 a una tasa de interés mensual del 2%. Calcular los intereses que mes con mes se generan.

Para un periodo se utiliza la ecuación 1.1 ($I=Ci$), donde se obtiene que en el primer mes se generan:

$$I = (200)(0.02) = 4$$

En el segundo periodo, dado que no se reinvierten los intereses y no se agrega ni se quita capital, los intereses se vuelven a calcular tomando como base los $200 iniciales, que con la tasa del 2% producen:

$$I = (200)(0.02) = 4$$

Para el tercer periodo se vuelven a invertir únicamente los $200 a la tasa del 2% generando los mismos $4. Por lo tanto podemos concluir que los intereses generados mes con mes son de $4.

Como se puede apreciar en el ejemplo anterior, una de las principales características del interés simple es que **los intereses que se generan periodo a periodo son constantes.**

2.2 Monto, valor acumulado o valor futuro.

Los términos de **monto, valor acumulado o valor futuro** pueden ser utilizados indistintamente y **denotan el valor final de un préstamo o inversión al cabo del plazo.** De aquí en adelante cualquiera de los tres términos podrá ser utilizado.

Para desarrollar la mecánica de cómo calcular el monto cuando el plazo es mayor a un periodo se hará uso del siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2 Se invierten $200 a una tasa de interés mensual del 2% durante 12 meses. Calcular el monto al finalizar los 12 meses.

Del ejemplo 2.1 ya se vio que los intereses generados mes con mes son:

$$I = (200)(0.02) = 4$$

Para calcular el monto al final del primer mes, se le suman al capital inicial los intereses generados en ese mes:

$$M = 200 + (200)(0.02) = 200 + 4 = 204$$

Para calcular el monto al final del segundo mes deben de ser sumados al capital inicial los intereses generados hasta este mes, es decir, los intereses generados tanto en el primer como en el segundo mes. Como los intereses son constantes, el monto en el segundo periodo es:

$$M = 200 + (2)(200)(0.02) = 200 + (2)(4) = 208$$

En el tercer mes el monto es el resultado de sumarle al capital tres periodos de intereses.

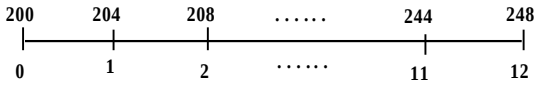
$$M = 200 + (3)(200)(0.02) = 200 + (3)(4) = 212$$

Siguiendo con este razonamiento el monto calculado al final del mes 12 sería:

$$M = 200 + (12)(200)(0.02) = 200 + (12)(4) = 248$$

De esta manera el monto producido por un capital de $200 al finalizar 12 meses a una tasa de interés del 2% mensual es de $248. El diagrama de tiempo para este ejemplo se muestra en la figura 2.1.

FIG. 2.1



Las cantidades que se muestran arriba de cada periodo, son los montos acumulados correspondientes.

Como se pudo observar en el ejemplo 2.2, el monto en cualquier periodo es el resultado de sumarle al capital los intereses que periodo a periodo se han ido

generando; para el periodo 2 se le suman 2 veces los intereses, para el periodo 5 se le suman 5 veces los intereses, etc.

De manera general, si se tiene un capital C y una tasa de interés i por periodo, el monto al final del primer periodo sería:

$$M = C + I = C + Ci = C(1+i)$$

El monto al final del segundo periodo dado que los intereses son constantes sería:

$$M = C + 2I = C + 2(Ci) = C(1+2i)$$

Siguiendo este proceso nos podemos dar cuenta que el monto al final de t periodos sería:

$$M = C + tI = C + tCi = C(1+ti) \qquad \textbf{2.1}$$

Donde:

- ***M*** : monto, valor acumulado o valor futuro después de t periodos.
- ***C*** : capital inicial
- ***i*** : tasa de interés.
- ***t*** : plazo o número de periodos de inversión.

Cabe aclarar que el número de periodos de inversión *t*, está en función de la convertibilidad de la tasa; si la tasa es mensual *t* se maneja en meses, si la tasa es anual *t* se maneja en años etc.

Ejemplo 2.3 Se depositan en el banco $3,000 a un plazo de 3 años donde se ofrece una tasa semestral del 15%. Encontrar el monto o valor futuro al cabo de los 3 años.

En este ejemplo como la tasa de interés es semestral y el plazo de inversión es por 3 años entonces el número de periodos que se invierte el capital es de 6. (3 años son equivalentes a 6 semestres). Utilizando la ecuación 2.1 donde C=$3,000, i=0.15 y t=6.

$$M = C(1+ti) = 3{,}000(1+(6)(0.15)) = 3{,}000 + 2{,}700 = 5{,}700$$

En la práctica, es común encontrarse con un documento conocido con el nombre de pagaré. **Un pagaré** es un documento en el cual el prestatario se compromete a pagar una deuda más los intereses correspondientes en un plazo establecido.

El valor nominal de un pagaré es la cantidad que ha de pagarse al término del plazo y es la deuda más los intereses generados.

Ejemplo 2.4. Por una deuda de $10,000 se firma un pagaré con vencimiento a 4 meses el cual cobra un 3% mensual. Encontrar el valor nominal del pagaré.

El valor nominal del pagaré es la cantidad que ha de ser pagada al vencimiento, i.e., el capital más los intereses generados. Aplicando la ecuación 2.1 con C=$10,000, i=0.03 y t=4.

$$M = C(1+ti) = 10{,}000(1+(4)(0.03)) = 11{,}200$$

El valor nominal del pagaré es de $11,200.

Hasta ahora se ha visto el caso en donde los periodos de inversión son enteros, cosa que no sucede necesariamente en la práctica, por lo que es necesario contemplar el hecho de que el número de periodos *t* sea fraccionario. Si por ejemplo se invierte un capital por 6 meses en donde la tasa de interés que ofrecen es anual, el plazo de inversión no corresponde ni siquiera a un periodo de la tasa de interés.

Para estos casos el ***t*** (plazo) puede manejarse de forma fraccionaria, por lo que si el plazo es de 6 meses y la tasa es anual entonces $t = 1/2$ años. (Recordar que t debe expresarse en función de la convertibilidad de la tasa).

Para manejar el tiempo cuando ***t*** no es entero es conveniente expresarlo como un cociente. Si se tiene una tasa mensual y la inversión es por 8 días, suponiendo que el mes tiene 30 días, entonces la inversión corresponde a 8 días de 30. Expresando el periodo en fracción se tiene $t = 8/30 = 0.2667$ meses.

En el caso en que se tenga una tasa anual y se invierte un capital por 4 meses entonces el tiempo transcurrido es $t = 4/12 = 0.3333$ años. La tabla 2.1 muestra algunos ejemplos al manejar plazos fraccionarios.

Nótese que siempre debe haber una correspondencia entre ***t*** y la convertibilidad de la tasa. Para el primer caso como se tiene una tasa anual y el plazo está en meses se realiza la equivalencia de que un año es igual a 12 meses. Para el segundo caso un mes es igual a 30 días; para el tercer caso un trimestre es equivalente a 3 meses y así sucesivamente. De esta forma el plazo va en el numerador y la equivalencia mencionada va en el denominador.

Tabla 2.1

Tasa	Plazo	t
anual	18 meses	$\frac{18}{12} = 1.5$ años
mensual	40 días	$\frac{40}{30} = 1.33$ meses
trimestral	7 meses	$\frac{7}{3} = 2.33$ trimestres
semestral	25 meses	$\frac{25}{6} = 4.17$ semestres
anual	180 días	$\frac{180}{360} = 0.5$ años

Ejemplo 2.5. $700 son invertidos a 45 días donde se cobra una tasa de interés del 5% mensual. ¿Cuál es el valor futuro de esta inversión?

En este caso el ***t*** debe manejarse en meses y como un mes equivale a 30 días se tiene que $t = 45/30 = 1.5$ meses, C=700 e i=0.05. Aplicando 2.1

$$M = 700\left(1+\left(\frac{45}{30}\right)(0.05)\right) = 700 + 52.5 = 752.50$$

El valor futuro es de $752.50

Siempre hay que tener presente que debe existir una correspondencia entre la convertibilidad de la tasa y el tiempo manejado en los periodos.

Ejemplo 2.6. Hace 200 días una persona invirtió $12,500 a una tasa de interés del 18% anual, retirando su dinero el día de hoy, ¿a cuánto asciende la cantidad retirada si se considera que un año tiene 360 días?

Para este ejemplo un año equivale a 360 días, por lo que el periodo de inversión medido en años es igual a $t = 200/360$ años. De esta forma se tiene que la cantidad retirada es:

$$M = 12{,}500\left(1+\left(\frac{200}{360}\right)(0.18)\right) = 13{,}750$$

2.3 Valor presente, valor actual o capital.

En la sección anterior se estudió el caso en el cual para una cantidad invertida a una tasa de interés se calculaba un monto; en esta sección se estudiará el caso en el cual se debe encontrar el capital necesario para producir un monto ya establecido, es decir, se quiere conocer la cantidad que debe depositarse hoy para obtener un determinado monto en el futuro.

Para conocer el capital que ha de ser invertido utilizaremos la ecuación 2.1 que es:

$$M = C(1 + ti) \qquad \textbf{2.1}$$

Despejando de esta ecuación el capital, se tiene:

$$C = \frac{M}{1 + ti} \qquad \textbf{2.2}$$

Donde:

- ***C*** : capital inicial, valor actual o valor presente.
- ***M*** : monto, valor acumulado o valor futuro.
- ***i*** : tasa de interés.
- ***t*** : plazo o número de periodos de inversión.

Ejemplo 2.7. Por una cierta cantidad invertida se retiraron a los 4 años $1,100 donde se ofreció una tasa de interés del 30% anual, ¿cuál fue el capital inicial?

Utilizando la ecuación 2.2 con M=$1,100, i=0.3 y t=4 se tiene:

$$C = \frac{M}{1 + it} = \frac{1{,}100}{1 + (4)(0.3)} = 500$$

Considerando el ejemplo 2.7, se dice que el valor presente o valor actual de $1,100 a 4 años es de $500. Por valor presente se entiende al proceso de regresar en el tiempo una cantidad, y no necesariamente evaluarlo el día de hoy.

Una regla que es conveniente tener en cuenta es que para encontrar un monto o acumular basta multiplicar por el factor (1+ti), mientras que si se desea encontrar el capital o traer a valor presente se debe dividir entre (1+ti).

De acuerdo a lo anterior, el valor futuro (monto) siempre es mayor que el valor presente (capital).

Ejemplo 2.8 Por una deuda se firmó un pagaré con valor nominal de $23,500 a 5 meses cobrándose una tasa del 20% semestral. Encontrar el valor de la deuda.

Como se explicó en la sección 2.2 el valor nominal de un pagaré es el préstamo más los intereses. El valor nominal en este caso es el monto, por lo que para conocer el valor de la deuda es necesario traer a valor presente el valor nominal de $23,500. En este caso M=$23,500, i=0.20 y $t = 5/6$ semestres.

$$C = \frac{M}{1+ti} = \frac{23{,}500}{1+\left(\frac{5}{6}\right)(0.20)} = 20{,}142.86$$

Ejemplo 2.9. Cierta empresa sabe que dentro de 15 meses se necesitarán $4,500 para compra de material. ¿Cuánto debe depositarse el día de hoy para acumular dicha cantidad si la tasa ofrecida es del 1.5% mensual?

Se requiere calcular un valor presente o el capital. Planteando:

$$C = \frac{M}{1+ti} = \frac{4{,}500}{1+(15)(0.015)} = 3{,}673.47$$

Con $3,673.47 invertidos hoy, se tendrán $4,500 en 15 meses con la tasa del 1.5% mensual.

2.4 Interés y tasa de interés.

El interés es la diferencia que existe entre el monto y el capital y se mide en términos monetarios, mientras que la tasa de interés es el porcentaje de cada peso que se devuelve periodo a periodo por un préstamo.

Recuerda que en interés simple, al capital inicial no se le agrega ni se le quita más capital, por lo que la diferencia entre el monto y el capital deben ser los intereses generados durante el plazo.

Se sabe del capítulo anterior que:

$$M = C + I$$

Despejando el interés se tiene:

$$I = M - C$$

Sustituyendo la fórmula de monto (ecuación 2.1) en esta última ecuación se tiene que los intereses se pueden expresar como:

$$I = C(1+ti) - C = Cti \qquad \textbf{2.3}$$

Recuérdese que los intereses periodo a periodo son constantes y que el interés por periodo se denota por Ci, por lo tanto al multiplicar el número de periodos *(t)* por los intereses generados periodo a periodo se obtienen los intereses totales durante el plazo.

Por convención se utilizan tasas anuales, por lo que en los problemas propuestos si no se especifica lo contrario las tasas que se utilizan son anuales.

Ejemplo 2.10. Por un préstamo de $1,200 a 5 años se pagará una tasa de interés del 26%.

a) Encontrar los intereses generados en los 5 años.
b) Encontrar la cantidad que ha de ser devuelta.

a) En este caso como no se especifica la convertibilidad de la tasa se considera por convención que es una tasa del 26% anual. Para obtener los intereses en los 5 años se obtienen los intereses en un año y se multiplica por 5. Aplicando la ecuación 2.3:

$$I = Cit = (1{,}200)(0.26)(5) = (312)(5) = 1{,}560$$

b) Para encontrar el monto le podemos sumar al capital inicial los intereses generados:

$$M = C + I = 1{,}200 + 1{,}560 = 2{,}760$$

O bien podemos aplicar directamente la ecuación de monto:

$$M = C(1+ti) = 1{,}200(1+(5)(0.26)) = 2{,}760$$

Ejemplo 2.11. Resolver el ejemplo 2.10 pero ahora considerando una tasa semestral del 13%.

a) El periodo de inversión es por 5 años, como la tasa está en semestres el tiempo debe ser medido también en semestres, por lo que t=10 semestres.

Utilizando 2.3:

$$I = Cit = (1{,}200)(0.13)(10) = (156)(10) = 1{,}560$$

b) Para encontrar el monto se aplicará directamente la ecuación 2.1:

$$M = C(1+it) = 1{,}200(1+(0.13)(10)) = 2{,}760$$

Nótese que los resultados obtenidos en 2.10 y 2.11 son idénticos, lo que significa que una tasa del 26% anual es equivalente a una tasa del 13% semestral. Por **tasas equivalentes se entiende que si un mismo capital es invertido a un mismo plazo dos tasas que pueden estar tener diferentes periodicidades producen exactamente el mismo valor futuro.**

Ejemplo 2.12. Se depositan $4,000 por 2 años. Encontrar el monto si:
a) se gana una tasa de interés del 24% anual.
b) se gana una tasa de interés del 2% mensual.

a) En este caso C=4,000, i=0.24 y t=2 años.

$$M = 4{,}000(1+(0.24)(2)) = 4{,}000 + 1{,}920 = 5{,}920$$

b) En este caso, como la tasa es mensual, el tiempo debe estar medido en meses, por lo que t=24 meses.

$$M = 4{,}000(1+(0.02)(24)) = 4{,}000 + 1{,}920 = 5{,}920$$

De acuerdo a la definición de tasas equivalentes podemos concluir que una tasa del 24% anual es equivalente a una tasa de interés del 2% mensual.

Si dos o más tasas son equivalentes podemos trabajar indistintamente con cualquiera de ellas y se obtendrán exactamente los mismos resultados.

De forma general podemos concluir de acuerdo a los ejemplos 2.10, 2.11 y 2.12 que una tasa anual del 26% es equivalente a una tasa semestral del 13%, y que una tasa anual del 24% es equivalente a una tasa mensual del 2%, etc. Para encontrar tasas equivalentes en interés simple solo basta dividir o multiplicar entre el número de periodos deseado, esto es: si se tiene una tasa anual y se quiere saber su equivalente mensual basta con dividir entre 12 la tasa anual para encontrarla.

Si se tiene una tasa semestral y se quiere calcular su tasa equivalente trimestral solo hay que dividirla entre 2. Para el caso en que se tiene una tasa mensual y se quiere encontrar su tasa equivalente semestral basta con multiplicarla por 6.

Esta regla sólo se aplica para interés simple, ya que como se verá en el capítulo 4 lo anterior no se podrá utilizar para interés compuesto.

Ejemplo 2.13. Se tiene una tasa trimestral del 12%. Encontrar las siguientes tasas equivalentes:

a) tasa mensual.
b) tasa semestral.
c) tasa anual.

a) La tasa mensual (i_m) se obtiene de dividir entre 3 la tasa trimestral.

$$i_m = \frac{0.12}{3} = 0.04$$

b) La tasa semestral (i_S) se obtiene de multiplicar por 2 la tasa trimestral.

$$i_s = (0.12)(2) = 0.24$$

c) La tasa anual (i_a) se obtiene de multiplicar por 4 la tasa trimestral.

$$i_a = (0.12)(4) = 0.48$$

Es importante recordar que si las tasas son equivalentes, entonces indistintamente pueden ser usadas, por lo que para el ejemplo 2.13 las tasas del 48% anual, 24% semestral, 12% trimestral o bien 4% mensual, pueden ser usadas en un problema particular, obteniendo los mismos resultados con cualquiera de ellas.

En ocasiones, por las condiciones del problema, es conveniente manejar una tasa equivalente para facilitar las operaciones a realizarse.

Ejemplo 2.14. Por un préstamo a 27 meses se devolverá la cantidad de $3,700 cobrándose un interés del 36%. ¿Cuánto fue lo que se prestó?

Como el problema no aclara la convertibilidad de la tasa se tiene por convención que es anual. Si se quisiera manejar la tasa anual el tiempo deberá estipularse en años quedando $t = 27/12$; en caso de que se utilice una tasa mensual usamos la equivalente que en este caso sería:

$$i_m = 0.36/12 = 0.03$$

Dado que esta tasa es mensual entonces t=27 meses facilitando el manejo de los datos. Aplicando la fórmula de valor presente:

$$C = \frac{3{,}700}{1+(0.03)(27)} = \frac{3{,}700}{1.81} = 2{,}044.20$$

Si se hubiese utilizado la tasa anual entonces:

$$C = \frac{3{,}700}{1+(0.36)(27/12)} = \frac{3{,}700}{1.81} = 2{,}044.20$$

El resultado en ambos casos no cambia puesto que se utilizan tasas equivalentes, pero al tener la tasa mensual el tiempo se maneja de forma entera.

Para terminar esta sección se te recuerda que debe existir una correspondencia entre la convertibilidad de la tasa y el tiempo manejado: si la tasa es trimestral el tiempo debe manejarse en trimestres, por ejemplo.

2.5 Plazo o tiempo.

Una de las variables importantes al considerar una inversión es el plazo o tiempo necesario para que un capital acumule un monto determinado, especificando la tasa de interés. En este tipo de problemas es conveniente expresar el plazo en términos de años, meses y días de ser posible, ya que comúnmente los resultados obtenidos directamente en un problema particular están en forma fraccionaria, por ejemplo 3.47 años. Esta última cifra no es muy representativa ya que no estamos acostumbrados a manejar el tiempo de esa manera, por lo que se hace necesario expresarla en términos de años, meses y días que es lo que utilizamos normalmente.

Para realizar la conversión se deberán realizar las siguientes consideraciones:

1 año = 12 meses, 1 mes = 30 días y 1 año = 360 días

Ejemplo 2.15. Expresar en años, meses y días la cantidad de 4.5645 años.

En este caso se sabe que han transcurrido 4 años completos más una fracción de año (0.5645). Esta fracción indica que ha transcurrido más de la mitad de un año, pero ¿a cuántos meses equivale exactamente dicha fracción? Para encontrar lo anterior es necesario multiplicar por 12 la fracción, ya que se sabe que un año tiene 12 meses. Por lo tanto:

$$(0.5645)(12) = 6.774 \text{ meses}$$

Ahora tenemos el problema de que han transcurrido 6 meses completos más una fracción (0.774). Procedemos como el caso anterior pero ahora consideramos que un mes tiene 30 días por lo que:

$$(0.774)(30) = 23.22 \text{ días}$$

Finalmente nos damos cuenta que los días también son fraccionarios. Podríamos repetir el proceso y convertir esa fracción en horas, y posteriormente en caso de ser necesario en minutos, etc. Este proceso en la práctica resultaría innecesario por lo que por conveniencia se termina hasta dejarlo en días, eliminando su fracción correspondiente. De esta forma se tiene que:

4.5645 años = 4 años, 6 meses y 23 días

Ejemplo 2.16. ¿A cuánto equivalen 670 días en años, meses y días?

En este problema el proceso es inverso al ejemplo 2.15. Se recomienda pasar los días directamente a años y realizar el proceso explicado en el ejercicio anterior. Para convertir los 670 días a años basta ahora con dividirlos entre 360 (ya que se supuso que un año tenía 360 días):

$$\frac{670}{360} = 1.8611 \text{ años}$$

De aquí vemos que 670 días poseen 1 año completo más una fracción. El número de meses que hay en 0.8611 años son:

$$(0.8611)(12) = 10.3333 \text{ meses}$$

El número de días que hay en 0.3333 meses son:

$$(0.3333)(30) = 10 \text{ días}$$

Por lo tanto:

670 días = 1 año, 10 meses y 10 días

Ejemplo 2.17. Por un préstamo de $5,000 se devolvieron $9,300 al cobrar un interés del 20%, ¿cuál fue el plazo del préstamo?

Nótese que la tasa es anual (no se especifica y por convención la suponemos anual), por lo que el tiempo debe ser manejado en años. Utilizando la ecuación 2.1 tenemos:

$$M = C(1 + ti)$$

Sustituyendo:

$$9{,}300 = 5{,}000(1 + 0.2\,t)$$

Despejando t:

$$1 + 0.2\,t = \frac{9{,}300}{5{,}000} = 1.86$$

Donde:

$$t = \frac{0.86}{0.2} = 4.3 \quad \text{años}$$

El tiempo está expresado en años por que la tasa es anual. Convirtiendo la fracción a meses:

$$(0.3)(12) = 3.6 meses$$

Convirtiendo los 0.6 meses a días:

$$(0.6)(30) = 18 \text{ días}$$

El tiempo entonces es de 4 años, 3 meses y 18 días.

2.6 Tiempo real.

Aunque algunos textos manejan dos tipos de tiempo, en la práctica sólo es utilizado el tiempo real. Sólo se mencionará en qué consiste el tiempo aproximado pero a través del texto sólo se utilizará el tiempo real.

El tiempo real es aquél en el cual se contabilizan los días exactos que hay entre dos fechas, los años son considerados de 365 días (366 en caso de un año bisiesto) y los meses dependiendo de cuáles sean éstos son contabilizados de 31, 30 y 28 días (29 en caso de ser año bisiesto).

El tiempo aproximado es un método que se utiliza para simplificar la contabilidad de los días, y como lo dice su nombre, se aproxima al número de días exacto entre dos fechas. Todos los años son considerados de 360 días y todos los meses de 30 días. Este tipo de tiempo generalmente no se utiliza en México, ya que al invertir dinero, se debe contabilizar el número de días exactos transcurridos en una transacción para determinar los intereses.

Para recordar el número de días que tiene cada mes se anexa la tabla 2.2.

Tabla 2.2

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Días	31	28 ó 29	31	30	31	30

Mes	Julio	Agosto	Sept.	Octubre	Nov.	Dic.
Días	31	31	30	31	30	31

Ejemplo 2.18. Encontrar el número de días exactos entre el 16 de enero del 2,008 y el 5 de julio del 2,008.

En este caso, los días que restan para terminar enero son 15. Por ser año bisiesto (los años de olimpiadas son años bisiestos) febrero tiene 29 días, y los días transcurridos de julio son 5. Por tanto el total de días son:

Enero: 15, febrero: 29, marzo: 31, abril: 30, mayo: 31, junio 30 y julio: 5.

Días transcurridos = 15+29+31+30+31+30+5 = 171

De aquí en adelante sólo se utilizará el tiempo real, ya que es el que se aplica en la práctica.

2.7 Interés comercial.

En el **interés real** para manejar las tasas de interés los años se consideran de 365 días (366 si es bisiesto).

En el **interés comercial** para manejar las tasas de interés los años se consideran de 360 días y los meses de 30.

El interés que comúnmente es utilizado en México es el interés comercial, ya sea para manejo de tasas de interés o bien para el cálculo de montos o valores presentes, por lo que si no se especifica lo contrario se considerará una tasa de interés comercial.

Ejemplo 2.19. Un pagaré se firma el 3 de marzo del 2008 por una deuda de $3,700. Si la tasa de interés cobrada es del 22% y vence el 7 de julio del mismo año, calcular el valor nominal del pagaré.

Utilizando interés comercial se debe considerar el tiempo exacto que hay entre el 3 de marzo y el 7 de julio; entre ambas fechas hay 126 días. Como la tasa está expresada en términos anuales, para realizar la fracción se asume que un año tiene 360 días, por lo que para calcular el valor nominal del pagaré se tiene:

$$M = 3{,}700\left(1 + (0.22)\left(\frac{126}{360}\right)\right) = 3{,}984.9$$

El valor nominal del pagaré al 7 de julio es de $3,984.9

La regla que se sigue entonces es: se calcula el número de días exacto que hay entre dos fechas, y posteriormente para ajustar el tiempo a la tasa de interés, se asumen años y meses de 360 y 30 días respectivamente.

Ejemplo 2.20 Por una deuda de $3,000 se devolvieron $3,085.5 al cabo de 54 días, ¿cuál fue la tasa anual que se cobró?

Como debe existir una correspondencia entre la tasa de interés y el tiempo, el tiempo se manejará en años para obtener así la tasa anual. En este caso $t = 54/360$ años. (Por convención se utiliza interés comercial con años de 360 días).

$$M = 3{,}085.5 = 3{,}000\left(1 + i\left(\frac{54}{360}\right)\right)$$

Despejando i:

$$\frac{3{,}085.5}{3{,}000} - 1 = i\left(\frac{54}{360}\right)$$

Finalmente:

$$i = (0.0285)\left(\frac{360}{54}\right) = 0.19 = 19\%$$

Ejemplo 2.21 Se paga una deuda de $17,230 con una cantidad de $18,217.85 cobrándose una tasa del 21.5% anual. Si el préstamo se efectuó el 21 de marzo del 2009, ¿cuándo se liquidó el adeudo?

Para saber la fecha en que se liquidó el adeudo es necesario conocer el tiempo transcurrido. Sea t el número de días que transcurrieron en el plazo, como la tasa está anual, entonces el tiempo expresado en años es de $t/360$. Utilizando la ecuación de monto:

$$M = 18{,}217.85 = 17{,}230\left(1 + 0.215\left(\frac{t}{360}\right)\right)$$

Despejando el tiempo:

$$\frac{18{,}217.85}{17{,}230} - 1 = 0.215\left(\frac{t}{360}\right)$$

Finalmente:

$$t = (0.0573)\left(\frac{360}{0.215}\right) = 96 \text{ días}$$

A partir del 21 de marzo transcurrieron 96 días. Marzo tiene 31 días, abril 30 y mayo 31. De aquí que del 21 de marzo al 21 de junio transcurren 92 días. Considerando los 4 días restantes se tiene que la deuda se liquidó el 25 de junio del 2009.

2.8 Ecuaciones de valor

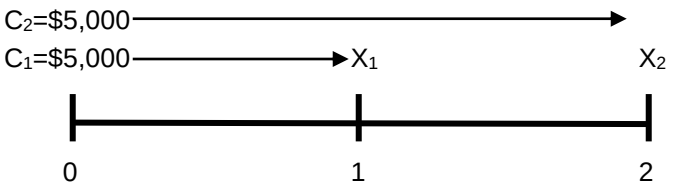
Hasta el momento se ha analizado el caso en que un préstamo es pagado mediante una sola exhibición, pero ¿qué sucede en el caso en que una deuda sea cancelada mediante dos o más pagos? Aquí es donde surge la utilidad de una ecuación de valor.

Antes de abordar directamente una ecuación de valor, veremos el siguiente ejemplo, con un método de prueba y error para resolverlo.

Ejemplo 2.22. Una deuda de $10,000 se liquidará con 2 **pagos iguales** en uno y dos años. La tasa de interés cobrada es del 20% anual. Calcular el valor de cada pago.

La clave para este ejemplo es hacer que ambos pagos sean iguales, ya que hay una infinidad de maneras de pagar esta deuda a través de dos pagos. Una manera simple de resolver este problema es considerar que dividimos en dos préstamos de $C_1=C_2=\$5,000$ la deuda de $10,000, y que cada préstamo se liquidará por separado.

Véase el siguiente diagrama de tiempo:



X_1 son los $5,000 acumulados un año:

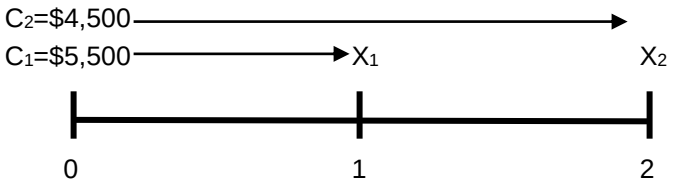
$$X_1 = 5{,}000(1+0.20(1)) = 6{,}000$$

X_2 son los $5,000 acumulados dos años:

$$X_2 = 5{,}000(1+0.20(2)) = 7{,}000$$

Con un pago de $6,000 en un año y otro de $7,000 a los dos años se liquida la deuda de $10,000, desafortunadamente los pagos son diferentes, y una condición del ejercicio es que ambos pagos sean iguales.

Una forma de ajustar este problema es dividir el préstamo tal que $C_1>C_2$ porque el capital 2 va a estar más tiempo generando intereses, y lo que se intenta igualar son los montos. Supongamos ahora que $C_1=\$5,500$ y que $C_2=\$4,500$



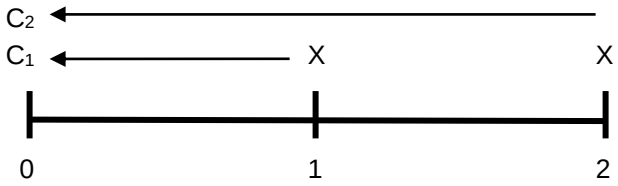
Ahora X_1 son los \$5,500 acumulados un año:

$$X_1 = 5{,}500(1 + 0.20(1)) = 6{,}600$$

Y entonces X_2 son los \$4,500 acumulados dos años:

$$X_2 = 4{,}500(1 + 0.20(2)) = 6{,}300$$

Nótese que con un pago de \$6,600 en un año y con otro pago de \$6,300 a los 2 años se paga una deuda de \$10,000. Los pagos ya están más cerca uno de otro, pero siguen sin ser iguales. Podríamos continuar dividiendo la deuda en dos capitales tales que produjeran el mismo monto al año y a los dos años, pero sería muy tardado. Veamos como podemos simplificar el proceso. Obsérvese el siguiente diagrama:



Lo que se busca es que los pagos de X sean iguales tales que:

$$C_1 + C_2 = 10{,}000$$

Note como C_1 es el valor presente a un año de la primera X:

$$C_1 = \frac{X}{1 + (0.20)(1)}$$

Y C_2 es el valor presente de la segunda X regresada 2 años:

$$C_2 = \frac{X}{1 + (0.20)(2)}$$

Como C1 y C2 deben sumar el valor del préstamo inicial tenemos:

$$C_1 + C_2 = \frac{X}{1 + (0.20)(1)} + \frac{X}{1 + (0.20)(2)} = 10{,}000$$

En esta ecuación, sólo queda X de incógnita que es precisamente el valor del pago. Para despejar X, se simplificará un poco la ecuación anterior:

$$\frac{X}{1.2}+\frac{X}{1.4}=10{,}000$$

Se recomienda expresar los cocientes de la siguiente manera y realizar primero las divisiones para no tener que calcular un común denominador:

$$\frac{1}{1.2}X+\frac{1}{1.4}X=0.833X+0.7143X=10{,}000$$

Sumando las X queda:

$$1.5476X=10{,}000$$

Donde:

$$X=6{,}461.54$$

Esto significa que una deuda de $10,000 puede ser pagada con 2 pagos iguales de $6,461.54 cada uno, al año y dos años.

Resumiendo lo que se hizo en el ejemplo 2.22 fue que los pagos de “X” se llevaron ambos a valor presente al periodo cero, que era la fecha donde se encontraba la deuda. Estas dos cantidades traídas a valor presente deberían ser iguales precisamente a la deuda de $10,000.

Una ecuación de valor es una equivalencia entre préstamos y sus respectivas formas de pago, o bien depósitos y sus correspondientes retiros. Los puntos que cabe tener en mente en una ecuación de valor son los siguientes:

- La idea fundamental de una ecuación de valor es que iguala lo que se debe a lo que se tiene que pagar, evaluando todas las cantidades consideradas en el mismo momento. En el ejemplo 2.22 los $10,000 se igualaron a los valores de los pagos.

  Lo que se debe = Lo que se tiene que pagar

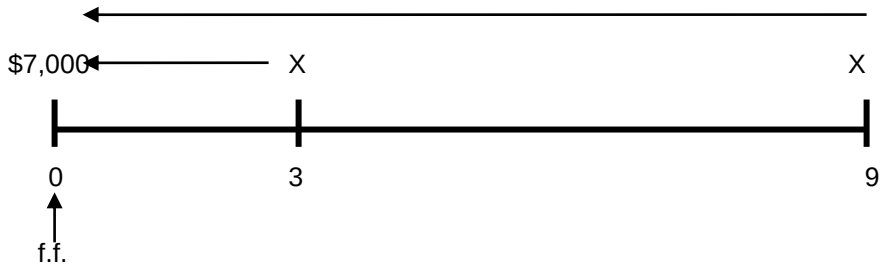
  Todo evaluado en un mismo momento en el tiempo.

- El momento en el que se evalúan todas las cantidades recibe el nombre de **fecha focal**. Por convención y en caso de no especificarse lo contrario se toma como fecha focal el día que se realiza la transacción. En el ejemplo anterior la fecha focal se consideró en cero, que fue el momento en el tiempo en el que se evaluaron todas las cantidades.

En pocas palabras, en una ecuación de valor se van a comparar cantidades en diferentes momentos, pero para poder hacer esto se requiere que todas las cantidades estén evaluadas en un mismo momento en el tiempo, al que se le conoce como fecha focal.

Lo que hace una ecuación de valor es partir una deuda en diferentes capitales, tal que los pagos tengan ciertas características, como ser iguales o que uno sea la mitad del otro.

Ejemplo 2.23 Para pagar una deuda de $7,000 se van a realizar 2 pagos iguales a los 3 y 9 meses. Calcular el valor de cada pago asumiendo una tasa de interés del 2% mensual. Considera la fecha focal en el periodo cero.



Los $7,000 deben ser iguales a dos capitales tales que acumulados produzcan dos pagos iguales a los 3 y 9 meses. Evaluando todas las cantidades en el periodo 0 tenemos:

$$7{,}000 = \frac{X}{1+(0.013)(3)} + \frac{X}{1+(0.013)(9)}$$

Como se puede apreciar se da una igualdad entre lo que se debe y lo que se paga, considerando el valor del dinero en el tiempo. La primera X debe ser regresada en el tiempo 3 meses y la segunda 9 meses para evaluarlas en el periodo 0. A los $7,000 no se les hace nada porque ya están evaluados en la fecha focal. Simplificando:

$$7{,}000 = \frac{1}{1.039}X + \frac{1}{1.117}X$$

Donde:

$$7{,}000 = 0.9624X + 0.8953X = 1.8577X$$

Finalmente, cada pago debe tener un valor de:

$$X = 3{,}768.06$$

El siguiente ejemplo muestra que la fecha focal puede estar en diferentes momentos, no necesariamente en cero.

Ejemplo 2.24 Una deuda de $6,000 contraída el día de hoy será cancelada con dos pagos iguales a los 2 y 5 meses, cobrándose una tasa de interés del 1.5% mensual. Encontrar el valor de los pagos si la fecha focal se localiza:

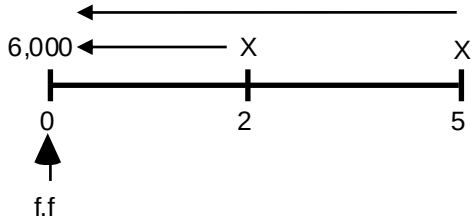
a) el día de hoy.
b) a los 5 meses.
c) a los 2 meses.

Teniendo en cuenta que:

Lo que se debe = Lo que se paga

Los dos pagos sumados deben ser iguales al préstamo, respetando siempre la tasa de interés y el momento en que se llevan a cabo los pagos.

a) El diagrama correspondiente al ejemplo, para una fecha focal en cero (hoy) sería:



Como la fecha focal está en cero, todas las cantidades deben llevarse a esa fecha. A los $6,000 no hay que hacerles nada puesto que ya están en la fecha focal. Si consideramos que el primer pago es de X, entonces este pago debe ser regresado 2 meses para llevarlo a cero. El último pago que también es de X, puesto que son iguales, debe llevarse 5 meses a valor presente para ubicarlo en la fecha focal. De esta manera se tendría la siguiente ecuación de valor:

$$6{,}000 = \frac{X}{1+(2)(0.015)} + \frac{X}{1+(5)(0.015)}$$

Por tanto:

$$6{,}000 = \frac{X}{1.03} + \frac{X}{1.075}$$

De aquí que:

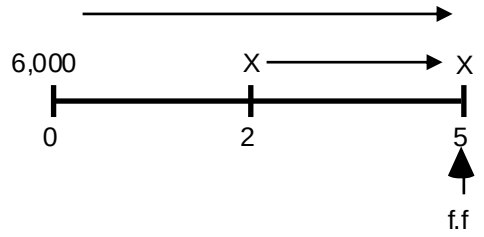
$$6{,}000 = 0.97\,X + 0.93\,X$$

Finalmente:

$$X = 3{,}156.06$$

El significado de lo anterior es que por un préstamo de $6,000 se deben pagar $3,156.06 a los 2 meses y $3,156.06 a los 5 meses, si la tasa cobrada es del 1.5% mensual y la fecha focal se considera hoy.

b) El diagrama de tiempo correspondiente a este ejemplo y para una fecha focal en 5 sería:



La ecuación de valor ahora contemplará que las cantidades se llevarán todas al mes 5 que es donde se localiza la fecha focal. Por tanto:

$$6{,}000\left[1+(5)(0.015)\right]=\mathrm{X}\left[1+(3)(0.015)\right]+\mathrm{X}$$

Entonces.

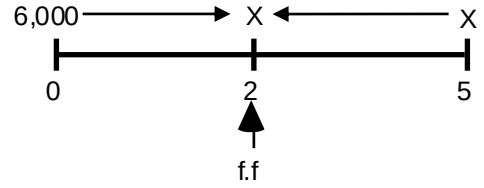
$$6{,}450=1.045\,\mathrm{X}+\mathrm{X}$$

Finalmente:

$$\mathrm{X}=3{,}154.03$$

El significado de lo anterior es que por un préstamo de $6,000 se deben pagar $3,154.03 a los 2 meses y $3,154.03 a los 5 meses, si la tasa cobrada es del 1.5% mensual, y la fecha focal se considera a los 5 meses.

c) Para el caso en que la fecha focal se localice en el mes 2, el diagrama de tiempo es el siguiente:



Para este caso todas las cantidades deben ser llevadas al mes 2: los $6,000 deben ser llevados 2 periodos a valor futuro; a la cantidad X que está en 2 no hay que hacerle nada puesto que ya está sobre la fecha focal, y la cantidad X que está en 5 debe ser regresada 3 periodos para ubicarla en 2. La ecuación quedaría entonces:

$$6{,}000\left[1+(2)(0.015)\right]=\mathrm{X}+\frac{\mathrm{X}}{1+(3)(0.015)}$$

Por tanto:

$$6{,}180=\mathrm{X}+0.9569\,\mathrm{X}$$

Finalmente:

$$\mathrm{X}=3{,}158$$

Esto significa que por un préstamo de $6,000 se deben realizar dos pagos iguales de $3,158 a los 2 meses y otro de $3,158 a los 5 meses, con una tasa del 1.5% mensual, si la fecha focal se considera a los 2 meses.

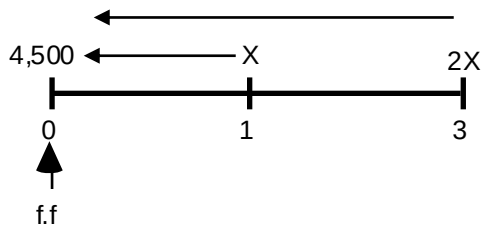
Del ejemplo anterior, podemos concluir que a pesar de que **la fecha focal** es solo un punto de referencia, **si influye para la obtención de resultados**, por lo que es importante especificar la fecha focal que se maneja.

Comúnmente la fecha focal que se utiliza es el momento en que se realiza la operación financiera.

Ejemplo 2.25 Una bicicleta con precio de lista de $4,500 se liquidará mediante dos pagos: al mes y a los 3 meses. Si se cobra una tasa de interés del 30% anual y el segundo pago es el doble del primero, encontrar el valor de los pagos.

En este caso no se especifica la fecha focal, pero suponiendo que la transacción se realiza el día de hoy, entonces se considerará que la fecha focal está en cero.

Como el segundo pago es el doble del primero, si consideramos que el primer pago es de X, entonces el segundo será de 2X.



Obsérvese que la tasa es anual y el tiempo está manejado en meses, por lo que la ecuación de valor quedaría como sigue:

$$4{,}500 = \frac{X}{1+\left(\frac{1}{12}\right)(0.30)} + \frac{2X}{1+\left(\frac{3}{12}\right)(0.30)} = \frac{1}{1.025}X + \frac{2}{1.075}X$$

Despejando X tendríamos:

$$X = 1{,}586.70$$

Donde:

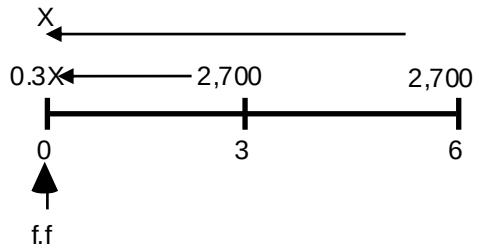
$$2X = 3{,}173.40$$

De esta forma, por un préstamo de $4,500 se deben realizar dos pagos de $1,586.70 al mes y $3,173.40 a los 3 meses.

Ejemplo 2.26 Por una televisión se dará un enganche del 30% y se realizarán 2 pagos iguales de $2,700 a los 3 y 6 meses, cobrándose una tasa de interés del 14% semestral. ¿Cuál es el precio de la televisión si la fecha focal se considera al momento de dar el enganche?

Sea X el precio total de la televisión. Como se da un enganche del 30% entonces el valor del enganche sería de 0.3X.

El diagrama de tiempo correspondiente es:



Obsérvese que ahora se deben realizar 3 pagos para liquidar la deuda. Por tanto, el planteamiento de la ecuación es:

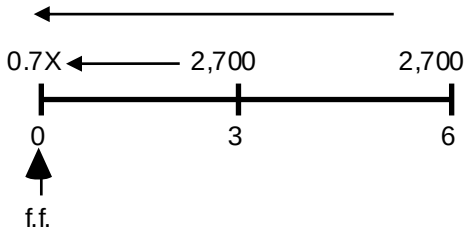
$$X = 0.3X + \frac{2{,}700}{1+\left(\frac{3}{6}\right)(0.14)} + \frac{2{,}700}{1+(1)(0.14)}$$

Despejando X

$$X = 6{,}988.27$$

Por lo tanto, para pagar la televisión con costo de $6,988.27 se deben realizar: Un enganche por $2,096.48, y 2 pagos de $2,700 a los 3 y 6 meses.

Una forma alternativa de plantear este problema es considerar que si se realiza un enganche por el 30% entonces se queda un adeudo del 70% del valor de la televisión, y este porcentaje debe ser pagado con las dos cantidades de $2,700. El diagrama de tiempo y la ecuación de valor quedarían como sigue:



y la ecuación:

$$0.7\,X = \frac{2{,}700}{1+\left(\frac{3}{6}\right)(0.14)} + \frac{2{,}700}{1+(1)(0.14)}$$

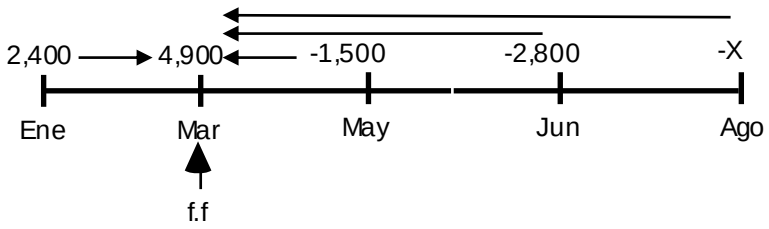
Donde:

$$X = 6{,}988.27$$

El concepto manejado en este caso es que solo se está financiando un 70% del valor de la televisión, porque ya se dio un enganche del 30%, y los pagos restantes de $2,700 servirán para cubrir este adeudo.

Ejemplo 2.27 Se sabe que por dos compras a crédito, de $2,400 y $4,900 realizadas en enero y marzo respectivamente, se han efectuado los siguientes pagos: $1,500 en mayo, $2,800 en junio y se desea liquidar el total del adeudo en agosto. Se sabe además que el interés cobrado es del 26% anual. Si se considera la fecha focal en marzo, encuentre el valor del pago que salda los adeudos.

En este caso son 2 adeudos que serán liquidados por 3 pagos, por lo que en la ecuación de valor habrá 2 términos del lado izquierdo y 3 términos del lado derecho. Utilizando un diagrama de tiempo se tiene:



Para este diagrama el signo positivo indica el adeudo (entrada de dinero), mientras que el signo negativo indica un pago (salida de dinero).

Todas las cantidades deben ser llevadas a la fecha focal, (a pesos de marzo), respetando que la suma de pagos debe ser igual a la suma de adeudos. La ecuación de valor queda como sigue:

$$2{,}400\left[1+(2/12)(0.26)\right]+4{,}900=$$

$$\frac{1{,}500}{\left[1+\left(\frac{2}{12}\right)(0.26)\right]}+\frac{2{,}800}{\left[1+\left(\frac{3}{12}\right)(0.26)\right]}+\frac{X}{\left[1+\left(\frac{5}{12}\right)(0.26)\right]}$$

Despejando X se tiene:

$$X = 3{,}698.72$$

El pago que debe realizarse en agosto para cancelar totalmente los adeudos es de $3,698.72.

Ejemplo 2.28 Se firman dos pagarés por dos deudas de $15,000 y $7,500 contraídas el día de hoy. La tasa cobrada para el primer pagaré es del 3% mensual y la del segundo es del 2.8% mensual; los vencimientos de los pagarés son de 8 y 5 meses respectivamente. A los 3 meses de haber firmado ambos pagarés se decide sustituirlos por 2 pagos iguales, el primero a los 4 meses y el segundo a los 9 meses a partir de la fecha de reestructuración (a partir de los 3 meses). Si la tasa cobrada al reestructurar es del 37.2% anual. Encontrar el valor de los pagos iguales.

Al momento que se firman los pagarés el deudor se compromete a pagar las siguientes cantidades en los meses 8 y 5 respectivamente con todo e intereses, es decir, los valores nominales de los pagarés son:

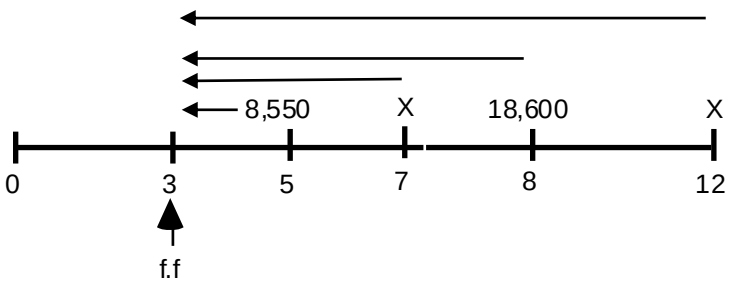
$$15{,}000\left[1+(8)(0.03)\right]=18{,}600$$

Para el segundo pagaré se tiene:

$$7{,}500\left[1+(5)(0.028)\right]=8{,}550$$

Si el deudor no decidiera reestructurar, los pagos que tendría que realizar son de $18,600 a los 8 meses y de $8,550 a los 5 meses.

Ahora bien, como se decide sustituirlos entonces los adeudos a los 5 y 8 meses (que son las cantidades comprometidas) deben considerarse para efectuar la ecuación de valor correspondiente. El diagrama quedaría como sigue:



Para realizar la ecuación de valor se considerará únicamente la tasa del 37.2% anual, ya que las tasas de los pagarés ya se contemplaron al calcular los intereses, y al momento de reestructurar la única tasa válida es precisamente la pactada en ese momento. Como en este caso no se establece fecha focal se considerará a los 3 meses que es precisamente el momento de la reestructuración.

$$\frac{8{,}550}{\left[1+\left(\frac{2}{12}\right)(0.372)\right]}+\frac{18{,}600}{\left[1+\left(\frac{5}{12}\right)(0.372)\right]}=$$

$$\frac{X}{\left[1+\left(\frac{4}{12}\right)(0.372)\right]}+\frac{X}{\left[1+\left(\frac{9}{12}\right)(0.372)\right]}$$

Finalmente:

$$X = 14{,}450.59$$

2.9 Intereses Moratorios.

En la práctica, si una deuda no es cubierta en el plazo establecido, se cobran intereses moratorios que comúnmente son mayores a los intereses pactados en la transacción financiera. Para fines de este texto, **los intereses moratorios aplican a partir de la fecha de vencimiento y toman como base el adeudo a dicha fecha**, pero en la práctica, se deben respetar las condiciones del contrato o pagaré financiero. Es decir, los intereses moratorios se cobrarán a partir no del adeudo original, sino de la cantidad estipulada al vencimiento.

Ejemplo 2.29 Se firma un pagaré a 35 días por una deuda de $8,500 a una tasa de interés del 35% anual. Se establece que en caso de no cumplir con el plazo se cobrarán intereses moratorios del 50%. Si el pago se realizó hasta los 60 días, ¿cuánto se pagó por el adeudo?

En caso de haber cumplido el deudor con el plazo estipulado originalmente, hubiese tenido que pagar:

$$M = 8{,}500 * \left(1 + (0.35)\left(\frac{35}{360}\right)\right) = 8{,}789.24$$

al no realizar el pago en el tiempo estipulado, a partir de los 35 días se cobrarán intereses moratorios, sobre los $8,789.24 que es lo que se debió haber pagado. En este caso se cobrarán intereses moratorios solo por los 25 días que rebasó el plazo. La tasa de interés moratoria es del 50%, quedando el pago final como:

$$X = 8{,}789.24\left(1 + (0.50)\left(\frac{25}{360}\right)\right) = 9{,}094.42$$

Ejemplo 2.30 Se pactan realizar 2 pagos iguales a los 2 y 5 meses por una bicicleta cuyo costo es de $5000. Los intereses ordinarios se establecen en un 25% y los intereses moratorios se fijan en un 35% anual. Si los pagos se realizaron efectivamente a los 65 y 170 días. ¿Cuánto se pagó en estas fechas?

Primeramente se tienen que calcular los pagos iguales mediante una ecuación de valor. Considerando la fecha focal el día de la compra:

$$5{,}000 = \frac{X}{\left[1 + (0.25)\left(\frac{2}{12}\right)\right]} + \frac{X}{\left[1 + (0.25)\left(\frac{5}{12}\right)\right]}$$

Por tanto:

$$X = 2{,}680.02$$

Como el primer pago se efectúa 5 días después de lo pactado se le deben cargar intereses moratorios; para este caso:

$$M = 2{,}680.02\left(1+(0.35)\left(\frac{5}{360}\right)\right) = 2{,}693.04$$

De esta forma el primer pago debe ser de $2,693.04 a los 65 días. El segundo pago se realiza con un retraso de 20 días por lo que:

$$M = 2{,}680.02\left(1+(0.35)\left(\frac{20}{360}\right)\right) = 2{,}732.13$$

Así, el segundo pago debe ser por $2,732.13 a los 170 días.

Ejemplo 2.31 Se firma un pagaré por una deuda de $2,575 a una tasa de interés del 15% semestral. Si el plazo es de 2 meses y en realidad el pago que se efectúa a los 88 días es por $2,796.28, ¿cuál es la tasa semestral de interés moratorio que se cobró?

El valor nominal del pagaré es:

$$M = 2{,}575\left(1+(0.15)\left(\frac{2}{6}\right)\right) = 2{,}703.75$$

Como la cantidad que se pagó se retrasó 28 días de lo pactado, entonces:

$$2{,}796.28 = 2{,}703.75\left(1+i\left(\frac{28}{180}\right)\right)$$

La fracción 28/180 es porque la tasa que se quiere es semestral. Despejando:

$$i = 0.22$$

Los intereses moratorios fueron del 22% semestral.

CASO DE ESTUDIO

¿Qué son los CETES?

Los Certificados de la Tesorería de la Federación son en realidad préstamos que solicita el gobierno a cierta tasa de interés y por un plazo determinado. Los plazos más frecuentes de los CETES son a 28, 91, 182 y 364 días, pero han existido una mayor variedad de plazos. La primera emisión de CETES fue en 1962, pero no fue sino hasta 1977 que adquirieron una gran importancia y su emisión ha sido de manera regular.

En la siguiente tabla se muestran las tasas de CETES a 28 días publicadas por el Banco de México. Las tasas aparecen con una periodicidad mensual e incluyen datos de enero del 2008 a abril del 2009.

Tasa de Cetes a 28 días*.

	28 días
2008/01	7.42
2008/02	7.43
2008/03	7.43
2008/04	7.44
2008/05	7.44
2008/06	7.56
2008/07	7.93
2008/08	8.18
2008/09	8.17
2008/10	7.74
2008/11	7.43
2008/12	8.02
2009/01	7.59
2009/02	7.12
2009/03	7.03
2009/04	6.05

* Datos obtenidos de www.banxico.gob.mx

Cuando un inversionista compra CETES sabe que al momento que se cumpla el plazo pactado, por cada CETES recibirá la cantidad de $10. La ganancia del inversionista es que éste pagará una cantidad inferior a los $10, y la diferencia será la ganancia obtenida. Por ejemplo, la tasa obtenida en abril del 2009 para 28 días fue del 6.05%. Las tasas que se reportan de CETES siempre son anualizadas. De esta manera, el precio que hubiera pagado un inversionista por un CETE sería:

$$P = \frac{10}{1+\left(\frac{28}{360}\right)(0.0605)} = 9.9532$$

De esta manera, si se hubiera comprado un CETE en abril se hubiera pagado por cada uno $9.9532 y se hubieran recibido $10 al transcurrir el plazo de 28 días.

Para darnos una idea de la importancia de CETES, el Banco de México publica en su página en internet que el día 26 de mayo del 2009 logró colocar (pedir un préstamo) de $24,000’000,000 en tres diferentes emisiones.

Se dice que CETES es un instrumento libre de riesgo porque el gobierno respalda el pago de esta deuda, y por lo tanto es casi un hecho que el pago se va a realizar.

Una ventaja de este instrumento financiero es que no necesariamente debes esperarte el plazo que estipula para recuperar tu inversión, ya que como es un instrumento muy “comercializado” es fácil encontrar compradores que deseen adquirirlo aún antes de su vencimiento. Es por esto que se dice que el mercado de CETES es un mercado muy líquido.

Ejercicios.

2.1 Introducción

1 Si se invierten $30,000 a una tasa del 15% semestral simple, ¿cuánto se genera por concepto de intereses semestre a semestre?

2 Si se generan $600 de intereses mes a mes cobrándose una tasa mensual del 2%, calcular la deuda original.

2.2 Monto, valor acumulado o valor futuro.

3 Encontrar el monto a 4 años para un capital de $3,500 generando 20% interés simple semestral.

4 Se depositan $750 en un banco. 48 días después se retiraron capital e intereses. Si la tasa ofrecida fue del 1.5% mensual, ¿cuánto se retiró?

5 Por una deuda de $12,000 contraída el día de hoy, se firma un pagaré a 15 meses cobrándose una tasa de interés simple del 36% anual. ¿Cuál es el valor nominal del pagaré?

6 Se solicita un préstamo de $5,200 por 90 días. Si la tasa cobrada es del 27% anual, ¿cuánto debe ser devuelto si se considera el año de 360 días?

2.3 Valor presente o capital.

7. Se recibirán $5,000 dentro de 5 años. Encontrar el valor presente si se utiliza una tasa del 1.2% mensual.

8 Por una inversión a 18 meses se recibieron $60,000 con un rendimiento del 14% anual.
a) ¿Cuál fue el capital invertido?
b) ¿Cuánto fueron los intereses generados durante los 18 meses?

9 Por una deuda se firma un pagaré con valor nominal de $5,000 y vencimiento a 13 meses; por una segunda deuda se firma otro pagaré con valor nominal de $6,000 a 20 meses, ¿cuál de las dos deudas es mayor si el interés es del 18% anual? (El valor nominal de un pagaré es el capital más los intereses).

10 Encontrar el valor presente de $1,300 para un periodo de 165 días si la tasa de interés es del 24% y se considera que el año tiene 360 días.

11 ¿En cuánto debe descontarse el día de hoy un pagaré con valor nominal de $35,000 y vencimiento a 5 meses, si se cobra una tasa del 7% trimestral? (El valor presente de un pagaré a una tasa de interés es conocido también como valor descontado del pagaré).

2.4 Tasa de interés e interés.

12 Se invierten $400 el día de hoy con interés simple del 10% anual. Encontrar:
a) el valor acumulado y los intereses generados en 2 años.
b) el valor acumulado y los intereses generados en 1 año.
c) el valor acumulado y los intereses generados en 6 meses.

13 Se invierten $400 el día de hoy con interés simple del 5% semestral. Encontrar:
a) el valor acumulado y los intereses generados en 2 años.
b) el valor acumulado y los intereses generados en 1 año.
c) el valor acumulado y los intereses generados en 6 meses.

14 En un banco se depositaron $5,000 hace 8 meses a una tasa del 12% anual. ¿Cuánto se retirará el día de hoy?
a) Utilizando la tasa anual.
b) Utilizando una tasa mensual equivalente al 12% anual.

15 Un inversionista deposita $2,000 hoy para retirarlos dentro de 5 años. Sabiendo que la tasa ofrecida es del 1.5% mensual, encontrar el valor futuro de su depósito si:
a) se utiliza la tasa mensual.
b) se utiliza una tasa anual equivalente al 1.5% mensual.

16 Por un préstamo de $500 se devolvieron $732 después de dos años y medio. Encontrar la tasa de interés anual cobrada.

17 ¿Para qué tasa de interés semestral un capital de $3,200 se duplica en 4 años?

18 ¿Cuánto se recibe de interés mensual si se depositan $4,000 a una tasa del 34% anual?

19 Se invierten $422,000 a una tasa del 12% semestral durante 2 años.
a) ¿Cuáles son los intereses generados mensualmente?
b) ¿A cuánto ascienden en total los intereses durante la operación?

20 De forma semestral se reciben $585 por concepto de intereses. Si la tasa es del 3% mensual, ¿qué capital está siendo invertido?

2.5 Plazo o tiempo.

21 Por una motocicleta con valor de $35,000 se decide dar un enganche por $25,000 y un pago de $11,500. Si la tasa de interés cobrada es del 30% anual, ¿cuánto tiempo después del enganche debe transcurrir para realizar el pago?

22 Una persona desea comprar un antecomedor cuyo costo es de $5,500. En este momento tiene $4,200 y puede invertir a una tasa del 15% anual. Si se le respeta el precio del antecomedor sólo seis meses, ¿es posible comprarlo el próximo semestre únicamente con sus $4,200 iniciales?.

23 ¿En cuánto tiempo se duplica un capital si la tasa de interés es del 30% anual?

2.6 Tiempo real.

24 El 18 de abril se depositaron $3,750 y el 18 de octubre se retiró la inversión. Si la tasa de interés cobrada fue del 19%:
a) ¿cuántos días transcurrieron entre ambas fechas?
b) ¿cuánto retiró el 18 de octubre si se considera el año de 360 días?

25 ¿Cuántos días transcurren entre el 26 de noviembre del 2008 y el 12 de abril del 2009?

2.7 Interés comercial.

26 El 14 de julio se invierten $25,000 a una tasa del 28% anual. Encontrar el monto al 15 de septiembre utilizando interés comercial.

27 Se recibieron $3,500 el 27 de octubre del 2008 por un capital depositado el 18 de junio del mismo año a una tasa del 11%. Encontrar el capital.

28 El 15 de enero del 2008 se depositaron $2,500 a una tasa de 18% anual. Si se sabe que se van a retirar en total $5100, ¿en qué fecha se realizará el retiro?

29 Por un depósito de $1,050 hecho el 24 de enero del 2008, se devolvieron $1,240 el 15 de septiembre.
a) ¿Cuál fue la tasa de interés cobrada en el periodo considerado?
b) ¿Cuál fue la tasa anual?

30 El 6 de abril se depositaron $35,000. El retiro correspondiente al depósito fue de $36,570 el 14 de agosto, ¿cuál es la tasa anual cobrada?

31 El 29 de agosto del 2000 se invirtió cierta cantidad de dinero, tal que el 5 de enero del 2001 se recibieron por concepto de intereses $550. Si la tasa de interés pactada fue del 10% anual, ¿cuánto dinero se invirtió el 29 de agosto.

32 El 10 de mayo del 2007 se recibieron $3,700 por un préstamo de $3,500 a una tasa del 1% mensual. ¿En qué fecha se realizó el depósito?

2.8 Ecuaciones de valor

33 Por una televisión que hoy cuesta $7,000 se efectuarán dos pagos iguales a los 60 y 90 días cobrándose una tasa de interés del 40% anual. Encontrar el valor de los pagos si:
a) se toma como fecha focal el día de hoy.
b) se toma la fecha focal a los 60 días.
c) se toma la fecha focal a los 90 días.

34 Por una lavadora se da un enganche del 20% y dos pagos a los 2 y 4 meses de $2,500 y $3,000 respectivamente. Si el interés cobrado es de un 2.5% mensual, encontrar el valor de la lavadora.

35 El día de hoy se solicita un préstamo por $10,000 y 61 días después se realiza un primer pago por $6,000. ¿En cuánto tiempo debe realizarse un segundo pago por $6,500, a partir de hoy, si el interés es del 40% anual?

36 Por un automóvil que hoy vale $100,000 se debe realizar un enganche del 30% y dos pagos en 1 y 2 meses, siendo el segundo $5,000 mayor que el primero. Si el interés es del 20% anual, ¿de cuánto deben ser los pagos?

37 El 15 de noviembre y el 21 de diciembre se vencen dos pagarés con valor nominal de $5,000 y $12,500 respectivamente, ambos a un interés del 25%. Se decide cambiarlos el 15 de octubre por dos pagos iguales el 15 y 30 de enero del siguiente año a una tasa del 28%. ¿De cuánto deben ser los pagos?

38 Por un antecomedor cuyo precio de contado es de $9,000 se ofrecen 2 planes de compra:
a) 3 pagos mensuales iguales a un interés del 15%, siendo el primer pago al final del primer mes.
b) 2 pagos semestrales al 17%, comenzando al final del primer semestre.
Si tú puedes invertir tu dinero al 25%, ¿qué opción resulta en un menor valor presente?

39 Para comprar una bicicleta que hoy vale $7,500 se da un enganche de $3,000 y se da otro pago de $5,000 a los 3 meses. ¿Qué tasa de interés anual se cobró?

40 Por una deuda de $10,000, contraída el 15 de marzo, se firma un pagaré con vencimiento el 15 de mayo, cobrándose una tasa del 25%. El 30 de marzo se firma un segundo pagaré por $15,000, cobrándose una tasa del 28%, y vencimiento el 1 de junio. El 10 de abril se decide sustituir ambos pagarés por 2 pagos iguales los días 15 y 30 de junio cobrándose ahora una tasa del 30%, ¿de cuánto deben ser los pagos?

2.9 Intereses Moratorios

41 Un préstamo de $55,000 debe ser pagado en 95 días a una tasa del 20% anual. Si existen intereses moratorios del 45% anual y el pago se realiza a los 120 días, ¿cuánto fue lo que se pagó realmente?

42 Al liquidar un adeudo de $4,500 contraído el 12 de abril del 2,007, se pagaron en total $4,638.41. Si los intereses cobrados fueron de 25% los primeros 30 días, e intereses moratorios del 35% de ahí en adelante, ¿en qué fecha se saldó la deuda?

43 Por un préstamo se devuelven $19,753.40 con todo e intereses, sabiendo que se cobrarían 3% de intereses mensuales los 45 días que duraría el préstamo, y en caso de retraso se cobraría 4.5% mensual de intereses

moratorios. Si el préstamo se liquidó a los 105 días, ¿cuánto se prestó originalmente?

Problemas tipo Examen

1 Cierta cantidad de dinero se invirtió a una tasa del 25% simple. Si el retiro se realizó el 31 de diciembre y en esta fecha la cantidad era un 10% mayor que la original, ¿en qué momento se realizó el depósito? Usar interés comercial.

2 Por una deuda de $4,186.05, el primero de marzo se firma un pagaré para liquidarse el 15 de mayo a una tasa del 3% mensual. El 28 de marzo se descuenta este pagaré a una tasa del 2% mensual. Encontrar el valor descontado del pagaré utilizando interés comercial.

3 Al comprar una televisión con precio de $6,270 se ofrecen los siguientes planes:
a) un enganche del 20% y 2 pagos iguales de $2,700 a los 2 y 4 meses.
b) un pago de $3,500 al mes y otro de $3,200 a los 5 meses.
Si puedes invertir al 20% anual tu dinero, ¿qué opción elegirías?

4 Por un préstamo te devolvieron $500 de intereses en un plazo de 107 días. Si la tasa de interés que cobraste fue del 10% anual, ¿cuánto dinero prestaste?

5 Una recámara con valor de $8,900 se pacta que se pagará con un enganche y dos pagos de $3,700 y $4,200 a los 3 y 6 meses respectivamente. Si la tasa cobrada es del 48%, ¿cuánto se dio de enganche? Considere la fecha focal en cero.

CAPÍTULO 3

DESCUENTO

3.1 Introducción.

Hasta el momento se ha estudiado la forma de calcular intereses a través del interés simple. En este tipo de interés se solicita un préstamo y sobre éste se calculan los intereses a cobrarse, mismos que han de ser pagados al final del periodo pactado. De esta forma la cantidad que se paga es mayor a la cantidad que se solicita.

El descuento tiene un concepto diferente y aunque es raro encontrarlo en transacciones financieras comunes, sí es utilizado en operaciones donde se involucran valores bursátiles como es el caso de los Certificados de la Tesorería (CETES) o bien en pagarés.

3.2 Tasa de descuento.

En el descuento a diferencia del interés, **los intereses se pagan por adelantado**; es decir, solicitas un préstamo y sobre ese préstamo se cargan los intereses, mismos que debes pagar en ese mismo instante, de tal manera que en realidad te prestan una cantidad menor a la requerida. Como los intereses son pagados al inicio del plazo, al final debes pagar únicamente el préstamo solicitado.

Ejemplo 3.1 Se pide un préstamo de $200 por un año, donde se cobra una tasa de descuento del 10% anual y los intereses se cobran por adelantado. Calcular la cantidad que realmente se presta.

Para calcular el interés cobrado basta con multiplicar la tasa de descuento por la cantidad solicitada:

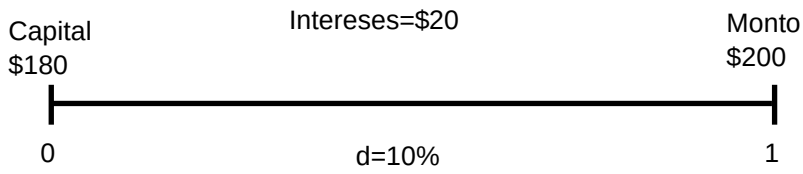
$$(200)(0.10) = 20$$

Estos $20 deben ser pagados al momento de pedir el préstamo por lo que en realidad se presta solamente:

$$200 - 20 = 180$$

Como los intereses son cubiertos por anticipado, la cantidad que deberá devolverse al final del periodo es de $200. La figura 3.1 muestra esta operación.

FIG 3.1



La tasa que se cobra recibe el nombre de tasa de descuento (d=10%) y la diferencia entre el monto y el capital son los intereses. Es importante destacar que la cantidad que en realidad se presta es menor a la que se pide, por cobrarse los intereses de forma anticipada.

Nótese que **a diferencia de la tasa de interés que se le aplica al capital, la tasa de descuento se le aplica al monto.**

Ejemplo 3.2 En un préstamo han de ser devueltos $6,500 en un mes. Si se cobra una tasa de descuento del 3% mensual, ¿cuánto es lo que se presta?

Para calcular los intereses de la operación se multiplica la tasa de descuento por el monto quedando:

$$I = (6{,}500)(0.03) = 195$$

Los intereses, por manejarse una tasa de descuento, son pagados por anticipado, por lo que el préstamo fue de:

$$6{,}500 - 195 = 6{,}305$$

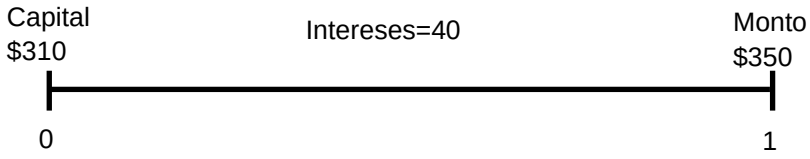
Para calcular la tasa de descuento en una transacción financiera se debe tomar como base el monto. La tasa de descuento es una relación entre los intereses pagados y la cantidad que se paga al final del periodo.

Ejemplo 3.3 ¿Qué tasa de descuento se cobró si se pidieron $350 y se cobraron intereses de $40 por adelantado?

Como se cobran $40 por anticipado el capital sería de:

$$350 - 40 = 310$$

El diagrama correspondiente sería:



Los intereses cobrados en la operación fueron de $40 que es la diferencia entre el monto y el capital. La tasa de descuento toma como base el monto, por lo que la tasa de descuento vendría dada por:

$$d = \frac{350 - 310}{350} = \frac{40}{350} = 0.114286$$

La **tasa de descuento por periodo** se puede definir como el porcentaje que representan los intereses pagados en un periodo, sobre la cantidad que se encuentra al final del mismo. La tasa de descuento estaría definida por:

$$d = \frac{M - C}{M} \qquad \textbf{3.1}$$

Donde:

- **d** : tasa de descuento.
- **C** : capital inicial.
- **M** : monto

En palabras, **la tasa de descuento es la diferencia que existe entre la cantidad al final del periodo y la cantidad al inicio del periodo, dividido entre la cantidad al final del periodo**.

En el capítulo 1 se definió la tasa de interés en la ecuación 1.4:

$$i = \frac{M - C}{C}$$

Nótese la analogía entre la tasa de interés y la tasa de descuento. En ambos casos en el numerador se tienen los intereses generados durante el periodo; sin embargo, para la tasa de interés se considera el capital ó la cantidad al inicio, mientras que para la tasa de descuento se contempla el monto ó la cantidad al final del periodo.

Ejemplo 3.4 Calcular la tasa de descuento semestral que se cobra, si para un préstamo de $9,230 se devuelven $11,450 en un semestre.

La tasa de descuento se puede calcular de la relación 3.1:

$$d = \frac{M - C}{M} = \frac{11{,}450 - 9{,}230}{11{,}450} = 0.1939$$

la tasa de descuento fue aproximadamente del 19.39%

De manera general la diferencia entre el monto y el capital se conoce con el nombre de intereses $M - C = I$; en algunas ocasiones el término de descuento es empleado en vez de intereses, ya que al monto hay que "descontarle" los intereses para encontrar el capital. Nosotros seguiremos llamando intereses a la diferencia entre el monto y capital.

Como se ha visto en los ejemplos anteriores, para encontrar los intereses cuando la tasa de descuento es utilizada, se tiene que multiplicar el monto por dicha tasa:

$$I = Md \qquad \textbf{3.2}$$

Donde:

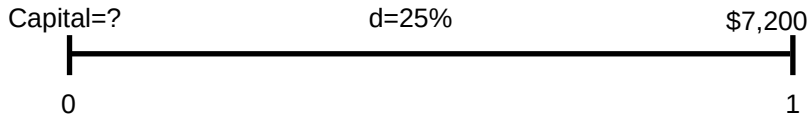
- **I** : intereses
- **d** : tasa de descuento
- **M** : monto

La relación 3.2 muestra que los intereses que se cobran por anticipado son el producto de la tasa de descuento y del monto.

Ejemplo 3.5 Un préstamo debe ser pagado en un año donde los intereses se pagan por adelantado. Si el monto es de $7,200 y la tasa de descuento del 25% anual:

a) ¿cuáles fueron los intereses en la operación?

b) ¿cuánto se presta en realidad?



a) Utilizando la ecuación 3.2 se tiene que los intereses cobrados son:

$$I = Md = (7{,}200)(0.25) = 1{,}800$$

b) Para calcular la cantidad que se presta en realidad es necesario "descontar" de los $7,200, los $1,800 que se pagan por concepto de intereses. De esta forma:

$$C = M - I = 7{,}200 - 1{,}800 = 5{,}400$$

Por lo tanto, para un préstamo de $5,400 el día de hoy, se deben pagar $7,200 al cabo de un año, si se cobra una tasa de descuento del 25%.

Ejemplo 3.6 Por un préstamo a 6 meses se cobran $396 por concepto de intereses. Si se cobró una tasa de descuento del 12% semestral:

a) calcular la cantidad que se devolverá al cabo del semestre.
b) calcular la cantidad que se presta al inicio.

a) Sabemos que en el descuento los intereses están relacionados con el monto. Utilizando la ecuación 3.2:

$$I = Md$$

despejando el monto y sustituyendo:

$$M = \frac{I}{d} = \frac{396}{0.12} = 3{,}300$$

La cantidad que se devuelve al finalizar el semestre es de $3,300

b) Lo que se presta al inicio es:

$$C = M - I = 3{,}300 - 396 = 2{,}904$$

Recuérdese que la operación de descuento toma como base al monto para el cálculo de los intereses, y el capital se obtiene restando estos últimos del monto.

Ahora bien, para calcular directamente el capital a partir del monto, sin tener que calcular el descuento, podemos utilizar la ecuación 3.2:

$$I = Md$$

Sabiendo que $\boldsymbol{I = M - C}$ y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$M - C = Md$$

despejando el capital se tiene:

$$C = M - Md = M(1 - d) \qquad \textbf{3.3}$$

Donde:

- **d** : tasa de descuento.
- **C** : capital inicial.
- **M** : monto

La ecuación 3.3 calcula el capital inicial del periodo a partir del monto y de la tasa de descuento aplicada en el periodo.

Ejemplo 3.7 Al cabo de 6 meses se pagarán $1,860, si la tasa de descuento que se cobra es del 12% semestral, ¿qué cantidad se presta en este momento?

La cantidad que se presta es el capital y los $1,860 es el monto, por lo que utilizando la ecuación 3.3 se obtiene:

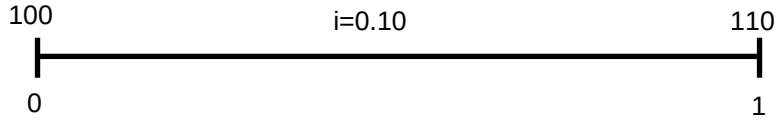
$$C = M(1-d) = (1{,}860)(1-0.12) = 1{,}636.8$$

3.3 Relación entre la tasa de interés y la tasa de descuento.

Mediante un ejemplo se intentará, en principio, comparar las diferentes magnitudes de las tasas de interés y descuento, para posteriormente encontrar una relación entre ambas.

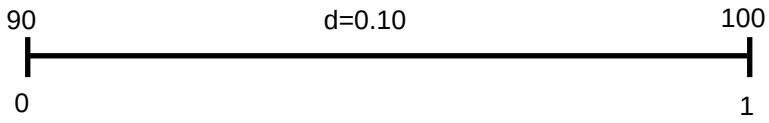
Ejemplo 3.8 Te prestarán $100 donde te dan a elegir entre una tasa de interés del 10% o bien una tasa de descuento del 10%. ¿Qué opción escogerías?

Para un interés del 10% la operación quedaría representada como sigue:



Como es tasa de interés, te prestan los $100 y pagas $10 por concepto de intereses al final del periodo, devolviendo $110.

Para una tasa de descuento del 10% la operación quedaría representada como sigue:



Como es tasa de descuento, pagas los $10 hoy por concepto de intereses y sólo te prestan $90.

En principio parecería que ambas operaciones son iguales ya que ambas cobran $10 por concepto de intereses. La diferencia radica en que para la tasa de interés los $10 se pagan al final del periodo, mientras que para la tasa de descuento se pagan al principio. Al tener el dinero mayor valor al principio que al final, entonces podemos concluir que la tasa de descuento es más cara que la tasa de interés.

Nótese además que en el interés te prestan realmente los $100 mientras que en el descuento te prestan solo $90, siendo que en ambos tienes que pagar los mismos $10 por concepto de intereses. Si pagas lo mismo de intereses es preferible entonces que te presten una cantidad mayor, que en este caso son los $100.

En conclusión, si tú vas a pagar un préstamo es preferible que te cobren una tasa de interés a que te cobren una tasa de descuento cuando son iguales.

En el ejemplo 3.8 se puede ver que la tasa de descuento del 10% es más "cara" que la tasa de interés del 10%. Por "cara" se entenderá que se pagarán mayores intereses (o se cobrarán en su caso) por un mismo préstamo, lo que significa que para el deudor o prestatario es más conveniente pagar una tasa de interés, mientras que para el acreedor o prestamista es más conveniente cobrar una tasa de descuento; siempre y cuando las tasas de interés y descuento sean las mismas.

Ahora bien, como la tasa de descuento es más cara entonces para que la tasa de interés produzca los mismos intereses, esta última debe ser mayor que la de descuento.

Para apreciar lo anterior veremos que un préstamo donde se cobra una tasa de descuento, se puede plantear como si se cobrara una tasa de interés y un préstamo donde se cobra una tasa de interés se puede plantear como si se cobrara una tasa de descuento. Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.9 Se prestan $80 y se devuelven $100.
a) ¿Qué tasa de descuento se cobró?
b) ¿Qué tasa de interés se cobró?

Independientemente del tipo de tasa, los intereses generados por el préstamo fueron de $20 (en interés se pagan al final y en descuento se pagan al principio).

a) La tasa de descuento es el cociente entre los intereses y el monto, por lo que:

$$d = \frac{M - C}{M} = \frac{I}{M} = \frac{20}{100} = 0.20$$

b) La tasa de interés es el cociente entre los intereses y el capital.

$$i = \frac{M - C}{C} = \frac{I}{C} = \frac{20}{80} = 0.25$$

En el inciso a) el enfoque es que se piden $100 y en realidad se prestan $80, ya que se pagan $20 por adelantado. En el inciso b) el enfoque es que se prestan $80 y se cobran $20 de intereses, mismos que han de pagarse al final del periodo, pagándose un total de $100.

Independientemente del enfoque la transacción es la misma, se prestan $80 y se pagan $100.

En el ejemplo 3.9 como la transacción es la misma, podemos deducir que las tasas de descuento e interés involucradas son equivalentes, es decir, por el mismo capital y tiempo, se debe pagar exactamente el mismo monto.

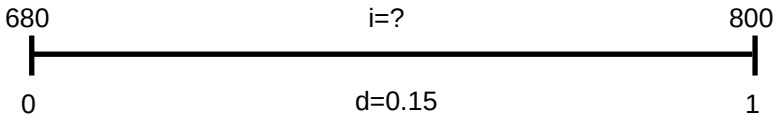
Aquí se confirma lo analizado en el ejemplo 3.8 ya que como el descuento es más caro, la tasa de interés debe ser mayor para que puedan ser equivalentes. En este caso una tasa de interés del 25% es equivalente a una tasa de descuento del 20% en un periodo. Esto significa que para una persona es exactamente lo mismo que le cobren una tasa de descuento del 20% o una de interés del 25% en un periodo.

Ejemplo 3.10 Un préstamo debe ser liquidado en un año, por lo que deben pagarse $800 al término del plazo. Si se cobra una tasa de descuento del 15%:
a) ¿cuánto se prestó?
b) Si en vez de cobrar una tasa de descuento se hubiera cobrado una tasa de interés equivalente, ¿de cuánto hubiera tenido que ser esta última?

a) Aplicando directamente la ecuación 3.3:

$$C = M(1 - d) = 800(1 - 0.15) = 680$$

b) Para encontrar la tasa de interés utilizaremos en el siguiente diagrama:



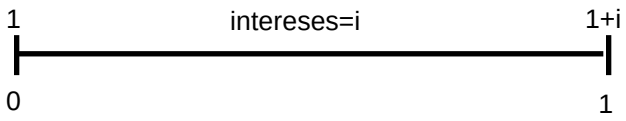
La tasa de interés estaría dada por la siguiente relación:

$$i = \frac{M - C}{C} = \frac{120}{680} = 0.17647$$

Esto significa que una tasa de descuento del 15% equivale a una tasa de interés del 17.647%

Ahora trataremos de encontrar una relación entre tasas de interés y descuento, para calcular tasas equivalentes por periodo. Para ello supóngase que se presta un peso a una tasa de interés i en un periodo. El monto al final del periodo es 1+i. La figura 3.2 representa la operación.

FIG 3.2



Tomando como base la operación mostrada en la figura 3.2 hay que encontrar la tasa de descuento correspondiente. Recordar que la tasa de descuento es el cociente entre los intereses (i) y el monto (1+i), por lo tanto:

$$d = \frac{M - C}{M} = \frac{(1+i)-1}{1+i}$$

finalmente:

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad \textbf{3.4}$$

La ecuación 3.4 muestra la relación de equivalencia entre una tasa de descuento y una tasa de interés.

Ejemplo 3.11 Calcular la tasa de descuento equivalente a una tasa de interés del 25%.

En el ejemplo 3.9 ya se vio que la tasa de descuento equivalente era del 20%; ahora utilizando la ecuación 3.4 se tiene:

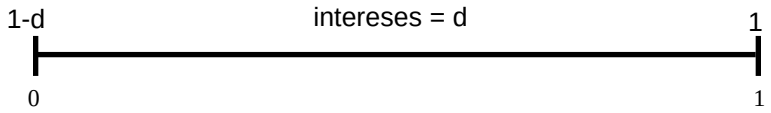
$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.25}{1+0.25} = \frac{0.25}{1.25} = 0.20$$

Es precisamente lo que se había obtenido anteriormente.

La ecuación 3.4 muestra como calcular una tasa de descuento a partir de una tasa de interés; ahora bien, para encontrar una relación de la tasa de interés en función de la de descuento, se procederá a realizar un análisis análogo al utilizado en la figura 3.2.

Supóngase ahora que se pide prestado un peso a una tasa de descuento d en un periodo. En realidad lo que se presta es 1-d y los intereses generados son d. Un diagrama que representa la operación sería:

FIG. 3.3



Tomando como base la operación mostrada en la figura 3.3 ahora hay que calcular la tasa de interés correspondiente. La tasa de interés es el cociente entre los intereses (d) y el capital inicial (1-d), por lo tanto:

$$i = \frac{M-C}{C} = \frac{1-(1-d)}{1-d}$$

finalmente:

$$i = \frac{d}{1-d} \qquad \textbf{3.5}$$

La ecuación 3.5 calcula la tasa de interés equivalente a una tasa de descuento. Esta ecuación se puede obtener despejando la fórmula 3.4.

Ejemplo 3.12 Calcular la tasa de interés equivalente a una tasa de descuento del 30%.

Utilizando la ecuación 3.5 se tiene:

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0.30}{1-0.30} = \frac{0.30}{0.70} = 0.42857143$$

Como se esperaba, debería de ser mayor para compensar que el descuento es más caro.

En este punto hay que tener mucho cuidado en el manejo de la tasas de interés y descuento, ya que no siempre una tasa de descuento será más cara que una de interés. Tomando el ejemplo 3.11, una tasa de descuento del 20% es equivalente a una tasa de interés del 25%. Esto significa que cualquier tasa de interés mayor al 25%, será más cara que una tasa de descuento del 20%; por ejemplo, una tasa de interés del 27% será más cara que una tasa de descuento del 20%.

Ejemplo 3.13 Te van a prestar $35,000 por un semestre y puedes escoger entre una tasa de interés semestral del 15% o bien una tasa de descuento semestral del 12%, ¿cuál escogerías?

Deberías escoger la tasa más "barata" por lo que es necesario comparar ambas tasas. Una forma de compararlas es calculando tasas equivalentes. En este caso se encontrará la tasa de interés equivalente a la tasa de descuento del 12%. Utilizando la ecuación 3.5:

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0.12}{1-0.12} = \frac{0.12}{0.88} = 0.1364$$

Una tasa de descuento del 12% equivale o es lo mismo que una tasa de interés del 13.64%. Esta tasa es menor al 15%, por lo que la tasa de descuento debería ser preferida.

Las relaciones de equivalencia obtenidas en las ecuaciones 3.4 y 3.5 sólo aplican cuando se considera un periodo exacto.

Ejemplo 3.14 En un préstamo se te cobrará una tasa de interés del 22%. Si se propone cambiar a una tasa de descuento, ¿cuál sería la tasa más alta de descuento que aceptarías para que te conviniera el cambio?

En este caso hay que encontrar la tasa de descuento equivalente a la tasa de interés del 22%. Cualquier tasa de descuento inferior a la encontrada sería preferida.

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.22}{1+0.22} = \frac{0.22}{1.22} = 0.1803 = 18.03\%$$

Una tasa de descuento del 18.03% sería lo mismo que la tasa de interés del 22%, por lo que para que convenga el cambio, la tasa de descuento debería ser inferior al 18.03%.

3.4 Valor presente con tasa de descuento.

Hemos visto hasta ahora con tasa de descuento, la forma de encontrar el capital en función del monto pero sólo a un periodo: si la tasa de descuento es semestral se puede encontrar el capital a un semestre, si la tasa es mensual se calcula a un mes, etc. Sin embargo, las operaciones no necesariamente coinciden exactamente con la convertibilidad de la tasa, por lo que es necesario encontrar una ecuación que calcule el capital prestado para cualquier tiempo. Para calcular dicha ecuación se asumirá que los intereses pagados periodo a periodo son iguales, como en el caso de interés simple. La fórmula que se obtenga es para descuento simple y es la que se maneja en todas las operaciones financieras donde está involucrado el descuento. Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.15 Se pide un préstamo, donde se pagarán $1,000 al final de 3 años. Si la tasa de descuento es del 10% anual, ¿cuánto se presta en este momento?

El supuesto que se maneja es que los intereses que se pagan periodo a periodo son constantes. Si el préstamo hubiera sido a un periodo, los intereses que se cobran por anticipado se obtendrían multiplicando los $1,000 por la tasa de descuento del 10%:

$$I = Md = (1{,}000)(0.10) = 100$$

Por lo tanto, la cantidad que se hubiera prestado a un periodo es:

$$C = M - I = 1{,}000 - 100 = 900$$

Para calcular lo que se hubiera prestado a 2 periodos basta con restar los mismos intereses un periodo más, ya que los intereses cobrados son constantes, por lo que el capital prestado es de:

$$C = 1{,}000 - 100 - 100 = 800$$

Los primeros $100 corresponden a los intereses cobrados el primer año, y los otros $100 corresponden a los intereses cobrados el segundo año.

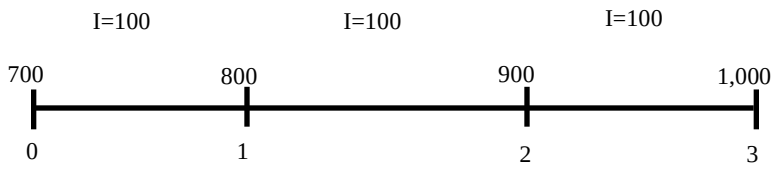
En el caso que se consideren los tres periodos se deben de cargar 3 veces los intereses, por lo que el capital prestado sería:

$$C = (1{,}000) - (3)(100) = 700$$

Lo que se presta realmente, si se van a pagar $1,000 dentro de 3 años con un tasa de descuento del 10%, son $700.

La figura 3.4 representa la operación planteada en el ejercicio 3.15.

FIG 3.4



La figura 3.4 muestra que por cada periodo se descuentan 100 de los $1,000 que en este caso es el monto. Siguiendo con este razonamiento si el tiempo transcurrido fuera de 6 años, la cantidad que debería ser descontada serían los $100 por los 6 periodos, que da un total de $600, prestando únicamente $400.

Con el ejemplo 3.15 nos podemos dar cuenta que basta calcular el descuento un periodo, para después restarlo el número de periodos que se estén contemplando. A un periodo se tendría:

$$C = M - I$$

pero como los intereses se obtienen multiplicando el monto por la tasa de descuento (I=Md) se tiene:

$$C = M - Md = M(1 - d)$$

quedando la ecuación de descuento a un periodo. Para dos periodos se tiene:

$$C = M - 2I = M - 2Md = M(1 - 2d)$$

De forma general se tiene que para t periodos la ecuación de descuento simple quedaría:

$$C = M(1 - td) \qquad \textbf{3.6}$$

Donde:

- **C** : capital inicial.
- **M** : monto
- **t** : número de periodos
- **d** : tasa de descuento

Ejemplo 3.16 Calcular el capital prestado si al cabo de 4 meses se pagarán $7,000 a una tasa de descuento del 2% mensual.

Utilizando la ecuación 3.6 se tiene:

$$C = M(1 - td) = 7{,}000(1 - (4)(0.02)) = 6{,}440$$

En la ecuación 3.6 el tiempo debe estar medido en correspondencia con la convertibilidad de la tasa, es decir, si la tasa es anual y el tiempo es de 6 meses entonces t=0.5 años, por ejemplo.

La operación de descuento se presenta en algunas transacciones financieras. Supóngase que una empresa tiene un pagaré firmado por un cliente a 6 meses por $5,000. La empresa en este momento requiere de liquidez y los $5,000 los recibirá hasta dentro de 6 meses. Lo que puede hacer es acudir a una institución financiera y pedir que le "compren" el pagaré. La institución financiera no lo comprará a $5,000 puesto que es lo que precisamente recibirá al cabo del plazo, lo que hace es aplicar una tasa de descuento y "comprar" más barato el pagaré de su valor nominal. Este proceso se conoce comúnmente como descontar un pagaré.

Ejemplo 3.17 Un pagaré con valor nominal de $15,000 se descuenta 3 meses antes de su vencimiento, con una tasa de descuento del 25% anual. ¿Cuál es el valor descontado del mismo?

En este caso los $15,000 son el monto y el valor descontado es el capital. Como la tasa es anual y el tiempo es 3 meses entonces $t = 3/12$ años. Utilizando la ecuación 3.6 se tiene:

$$C = M(1 - td) = 15{,}000\left(1 - \left(\frac{3}{12}\right)(0.25)\right) = 14{,}062.5$$

El pagaré se descuenta a un valor de $14,062.5 faltando 3 meses para su vencimiento.

Entre mayor sea el tiempo en el que se descuenta un pagaré, menor será su valor descontado.

Ejemplo 3.18 El valor descontado de un pagaré 18 meses antes de su vencimiento es de $5,292.5, si el valor nominal del mismo era de $7,250, ¿cuál fue la tasa de descuento anual que se aplicó?

La tasa está anual por lo que en este caso $t = 18/12$ años. Utilizando la ecuación 3.6 se tiene:

$$7{,}250\left(1-\left(\frac{18}{12}\right)(\mathrm{d})\right) = 5{,}292.5$$

Despejando la tasa de descuento se tiene:

$$\left(1-\left(\frac{18}{12}\right)(\mathrm{d})\right) = \frac{5{,}292.5}{7{,}250}$$

De aquí que:

$$1.5\mathrm{d} = 1 - 0.73$$

Finalmente:

$$\mathrm{d} = 0.18$$

En este momento se procederá a encontrar una relación útil en operaciones de descuento. Recuérdese que el interés es la diferencia entre el monto y el capital:

$$\mathrm{I} = \mathrm{M} - \mathrm{C}$$

Sabiendo que $\mathrm{C} = \mathrm{M}(1-\mathrm{dt})$ y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\mathrm{I} = \mathrm{M} - \mathrm{M}(1-\mathrm{dt})$$

Realizando operaciones:

$$\mathrm{I} = \mathrm{M} - \mathrm{M} + \mathrm{Mdt}$$

Finalmente, los intereses cobrados en términos del monto, la tasa de descuento y el tiempo son:

$$I = Mdt \qquad \textbf{3.7}$$

Ejemplo 3.19 Un pagaré se descuenta por $7,500 menos de su valor nominal, faltando 15 meses para su vencimiento. La tasa de descuento aplicada fue del 24% anual. ¿Cuál era el valor nominal del pagaré?

Los $7,500 son los intereses cobrados por la operación, por lo que utilizando la ecuación 3.7:

$$I = Mdt$$

Despejando el monto que es lo que se busca:

$$M = \frac{I}{dt} = \frac{7{,}500}{(0.24)\left(\frac{15}{12}\right)} = 25{,}000$$

El valor nominal del pagaré era de $25,000 y su valor descontado fue de $17,500 (25,000-7,500).

Ejemplo 3.20 Un pagaré a 5 meses se firma con un interés del 32% anual por una deuda de $44,000. A los dos meses de haber firmado el pagaré, éste se descuenta a una tasa de descuento del 26%, calcular el valor descontado del pagaré.

Al firmarse el pagaré, el prestamista sabe que al cabo de 5 meses recibirá el adeudo más los intereses. Apoyándonos en el siguiente diagrama podemos ver la operación:

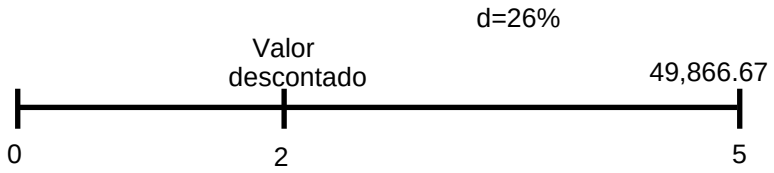
Calculando el valor nominal del pagaré con la tasa de interés del 32%:

$$M = C(1+it) = 44{,}000\left(1+(0.32)\left(\frac{5}{12}\right)\right)$$

Realizando operaciones:

$$M = 49{,}866.67$$

Esta cantidad sería el valor nominal del pagaré. Esta cantidad debe ser descontada 3 meses antes de su vencimiento, como lo muestra el siguiente diagrama:



El valor descontado es el capital, por lo que aplicando la tasa de descuento del 26% se tiene:

$$C = M(1 - dt) = 49{,}866.67\left(1 + (0.26)\left(\frac{3}{12}\right)\right)$$

Donde:

$$C = 46{,}625.33$$

Esto significa que el pagaré vale $46,625.33, 3 meses antes de su vencimiento, con las condiciones establecidas.

3.5 Monto o valor futuro con tasa de descuento.

En secciones anteriores se ha estudiado la forma de calcular valores presentes con tasa de descuento. El enfoque hasta ahora utilizado es que se solicita una cantidad, pero los intereses se cobran por adelantado, por lo que se presta una cantidad inferior a la requerida.

Ahora bien, si la persona efectivamente necesita la cantidad solicitada, no le vendrá muy bien que le presten una cantidad menor. Lo que nos importa en este momento es que si se le sigue cobrando una tasa de descuento y se le presta exactamente lo que pidió, ¿cuánto es lo que deberá devolver al cabo del plazo? En otras palabras, si se conoce el capital, el monto debe ser calculado.

De la ecuación 3.6 sabemos:

$$C = M(1 - dt)$$

Para encontrar el monto basta con despejar la ecuación anterior, quedando:

$$M = \frac{C}{1 - dt} \qquad \textbf{3.8}$$

Donde:

- **M** : monto
- **C** : capital inicial
- **t** : número de periodos
- **d** : tasa de descuento

Ejemplo 3.21 Se prestan el día de hoy $10,000 a una tasa de descuento del 10% semestral, ¿cuánto es lo que se devolverá al cabo de un año?

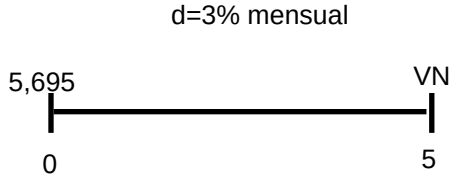
Como la tasa es semestral, en este caso $t = 2$ semestres. Utilizando la ecuación de monto (3.8) se tiene:

$$M = \frac{C}{1 - dt} = \frac{10{,}000}{1 - (0.10)(2)} = 12{,}500$$

En este punto es importante notar que para obtener un monto con tasa de descuento, ahora se tiene que dividir entre el factor (1-dt); y que para obtener valores presentes, se tiene que multiplicar por el mismo factor, que es lo contrario del interés simple.

Ejemplo 3.22 El valor descontado de un pagaré 5 meses antes de su vencimiento fue de $5,695, cobrándose una tasa de descuento del 3% mensual. Calcular el valor nominal del pagaré.

Los $5,695 son el capital y el valor nominal es el monto, de esta forma:

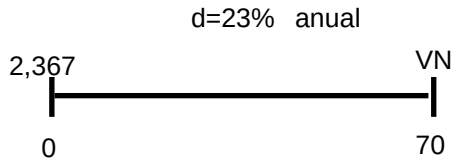


Planteando la ecuación:

$$M = \frac{C}{1 - dt} = \frac{5{,}695}{1 - (0.03)(5)} = 6{,}700$$

Ejemplo 3.23 Un pagaré se descontó en $2,367 a una tasa de descuento del 23% anual, faltando 70 días para su vencimiento. El pagaré originalmente amparaba una deuda a 130 días con una tasa de interés del 24.5% anual, ¿cuál era la deuda originalmente?

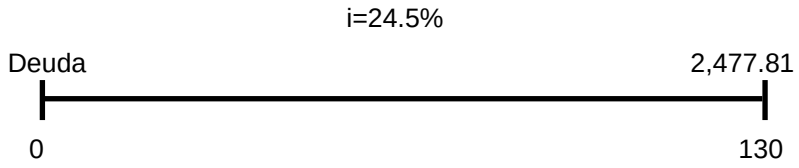
Se sabe que el pagaré se descontó 70 días antes de su vencimiento y se conoce el valor descontado. A partir de esto se puede calcular el valor nominal del pagaré, como se ilustra en el diagrama:



El valor nominal es el monto, y el valor descontado es el capital, entonces:

$$M = \frac{C}{1-dt} = \frac{2{,}367}{1-(0.23)\left(\frac{70}{360}\right)} = 2{,}477.81$$

Sabiendo el valor nominal del pagaré se puede encontrar el valor de la deuda, de acuerdo al siguiente diagrama:



Para calcular la deuda, basta con regresar a valor presente los $2,477.81, los 130 días. Utilizando interés simple:

$$C = \frac{M}{1+it} = \frac{2{,}477.81}{1-(0.245)\left(\frac{130}{360}\right)} = 2{,}276.41$$

3.6 Comisiones y descuentos.

En la actualidad es muy común encontrarse con descuentos o rebajas en mercancías en cualquier tienda. Estos descuentos no tienen que ver con el tiempo, simplemente se le descuenta el porcentaje correspondiente al precio y en ese momento la mercancía debe ser liquidada (para el caso de tarjetas de crédito, en ese momento es realizado el cargo). Para calcular el precio final de una mercancía que tiene un descuento, basta con multiplicar el descuento por el precio de lista y el resultado restárselo al precio de lista.

Ejemplo 3.24 Encontrar el precio final de una televisión cuyo precio de lista es de $5,000 y se ofrece con un descuento del 15%.

El descuento otorgado por la televisión es de:

$$\text{Descuento} = (5{,}000)(0.15) = 750$$

El precio final es de:

$$\text{PF} = 5{,}000 - 750 = 4{,}250$$

Para calcular el descuento aplicado a una mercancía, sólo hay que multiplicar el precio por el porcentaje que se rebaja en la mercancía:

$$\text{Descuento} = (\text{PL})(\text{d}) \qquad \textbf{3.9}$$

Donde:

PL : es el precio de lista, antes de aplicar la rebaja
d : es la rebaja o descuento medido como porcentaje

Para calcular el precio final se tendría que restar del precio de lista el descuento:

$$\text{PF} = \text{PL} - \text{Descuento}$$

Si sustituimos el descuento de la fórmula 3.9 se tiene:

$$\text{PF} = \text{PL} - (\text{PL})(\text{d})$$

Factorizando:

$$\text{PF} = \text{PL}(1 - \text{d}) \qquad \textbf{3.10}$$

Donde PF es el precio con el descuento incluido.

Ejemplo 3.25 Se ofrece un descuento del 25% por una sala con valor de $7,000.

a) ¿Cuánto se tendría que pagar por dicha sala?

b) ¿Cuál fue el descuento aplicado?

a) Para calcular directamente el precio final aplicamos la ecuación 3.10 con d=0.25.

$$\mathrm{PF} = \mathrm{PL}(1-\mathrm{d}) = 7{,}000(1-0.25) = 5{,}250$$

b) El descuento es la diferencia entre el precio de lista y el precio final, entonces:

$$\text{Descuento} = 7{,}000 - 5{,}250 = 1{,}750$$

Una forma alternativa de calcular el descuento es multiplicar el porcentaje de descuento por el precio de lista:

$$\text{Descuento} = (7{,}000)(0.25) = 1{,}750$$

Un error muy común se comete cuando una vez teniendo el precio final se desea calcular el precio de lista. Recuérdese que el descuento se aplica al precio de lista y no al precio final. Tómese el ejemplo anterior donde el precio final fue de $5,250 y se aplicó un descuento del 25%. Suponemos ahora que no sabes el precio de lista y te piden ahora encontrar precisamente dicho precio. Existe la tentación de multiplicar el porcentaje de descuento por el precio final, es decir:

$$(5{,}250)(0.25) = 1{,}312.5$$

para luego sumárselo al precio final:

$$5{,}250 + 1{,}312.5 = 6{,}562.5$$

lo que nos llevaría a un resultado totalmente incorrecto (el resultado correcto es de $7,000). El error radica, en que el 25% se debe aplicar al precio de lista, y no a los $5,250 que es el precio con descuento incluido.

Para calcular de forma correcta el precio de lista basta con despejarlo de la ecuación 3.10:

$$\mathrm{PF} = \mathrm{PL}(1-\mathrm{d})$$

Finalmente:

$$\mathrm{PL} = \frac{\mathrm{PF}}{1-\mathrm{d}}$$

Ahora sustituimos los valores del ejemplo:

$$\text{PL} = \frac{5{,}250}{1-0.25} = 7{,}000$$

Este es el resultado que esperábamos obtener.

Ejemplo 3.26 Una bicicleta se compró en $4,250 y se sabe que tenía un descuento del 20%.

a) ¿Cuál era el precio sin descuento?

b) ¿Cuál fue el descuento que se aplicó?

a) Utilizando la ecuación 3.10 y despejando el precio de lista se tiene:

$$\text{PL} = \frac{\text{PF}}{1-\text{d}} = \frac{4{,}250}{1-0.20} = \frac{4{,}250}{0.80} = 5{,}312.5$$

b) El descuento se calcula multiplicando el precio de lista por el porcentaje de descuento:

$$\text{Descuento} = (5{,}312.5)(0.2) = 1{,}062.5$$

O bien restando del precio de lista, el precio final:

$$\text{Descuento} = 5{,}312.5 - 4{,}250 = 1{,}062.5$$

En algunas ocasiones los descuentos son en cadena, es decir, un artículo puede tener varios descuentos a la vez. Suponiendo que son dos los descuentos que han de aplicarse, el primero se calcula sobre el precio de lista y el segundo sobre el precio que resultó al aplicarse el primer descuento. Esto se traduce, como veremos más adelante, en que si un artículo tiene dos descuentos: uno del 10% y el otro del 20%, el descuento verdaderamente aplicado no es del 30% como pudiera pensarse en primera instancia.

Ejemplo 3.27 Una tienda de autoservicio ofrece un descuento del 10% en el departamento de deportes, y además un 20% de descuento en todo el calzado deportivo. Si el precio de lista de unos tenis es de $1,000, ¿cuánto es lo que en realidad se debe pagar por ellos?

Lo primero que hay que recalcar es que los 2 descuentos no se aplican directamente a los $1,000. Si se aplicaran directamente entonces habría un descuento de $100 correspondiente al 10%, y otro de $200 correspondiente al

20%, lo que se traduciría en un precio final de $700. Esto es incorrecto ya que los descuentos están encadenados.

La pregunta que surge ahora es: ¿cuál de los dos descuentos debe ser aplicado primeramente, el del 10% o el del 20%? Como veremos no existe diferencia en el orden en el que se apliquen los descuentos.

Calcúlese primero el 10% y posteriormente el del 20%. Para el 10%:

$$1{,}000(1-0.10)=900$$

Ahora sobre este precio debe ser calculado el descuento del 20%.

$$900(1-0.20)=720$$

Nótese que los descuentos se pueden aplicar en una sola operación:

a) $$\text{PF}=1{,}000(1-0.10)(1-0.20)=720$$

Calcúlese ahora el descuento del 20% y luego el del 10%. Para el 20%:

$$1{,}000(1-0.20)=800$$

Ahora sobre este precio debe ser calculado el descuento del 10%.

$$800(1-0.10)=720$$

Nótese que los descuentos se pueden aplicar en una sola operación:

b) $$\text{PF}=1{,}000(1-0.20)(1-0.10)=720$$

Véase como a) y b) nos brindan el mismo resultado, ya que el orden de los factores no altera el producto.

Del ejemplo 3.27 podemos deducir que un descuento del 30% no es equivalente a dos descuentos encadenados del 10% y del 20%. De hecho en el ejemplo, a la tienda le conviene más vender con descuentos encadenados. Con el descuento del 30% la tienda vende los tenis a $700 mientras que con los descuentos en cadena los vende a $720. Esto es porque al considerar descuentos en cadena, una vez aplicando el primer descuento (el precio es ahora menor), la base sobre la que se han de calcular los demás descuentos ya es inferior que el precio original y por ende el descuento aplicado disminuye.

Sería conveniente entonces calcular para el caso de descuentos en cadena, cuál hubiera sido el **descuento único equivalente** a los descuentos referidos. Esto significa que en vez de estar calculando todos los descuentos se calcule solamente uno, pero que produzca el mismo resultado.

Suponiendo que existen 3 descuentos, la forma de encontrar el precio final sería:

$$PF = PL(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)$$

Si se aplicara un solo descuento "d" el precio final sería:

$$PF = PL(1-d)$$

Para que la tasa de descuento d sea equivalente a los 3 descuentos anteriores, los precios finales deben ser iguales, entonces:

$$PL(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3) = PL(1-d)$$

Como los precios de lista son los mismos, la ecuación de equivalencia entre descuentos sería:

$$(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3) = (1-d) \qquad \textbf{3.11}$$

Esto nos indica que la multiplicación de todos los factores de descuento en cadena, debe ser igual al factor de descuento único equivalente.

Ejemplo 3.28 Encontrar el factor de descuento único equivalente para descuentos en cadena del 10% y del 20%.

Utilizando la ecuación 3.11 se tiene:

$$(1-0.10)(1-0.20) = (1-d)$$

Realizando algunos cálculos:

$$(0.90)(0.80) = 0.72 = (1-d)$$

Despejando d:

$$d = 1 - 0.72 = 0.28$$

Con este ejemplo se ve que dos descuentos en cadena del 10% y 20%, equivalen a un descuento único del 28%. En el ejemplo 3.27 los tenis valían $1,000 y se les aplicaban los descuentos del 10% y 20%. Si se le hubiera aplicado únicamente el descuento del 28% se le hubieran rebajado $280 quedando el precio final de $720, que es precisamente el resultado que se obtuvo en el ejemplo.

Mientras que los descuentos reducen el precio de una mercancía, existen comisiones e impuestos que las incrementan, tal es el caso del IVA. **El impuesto al valor agregado o IVA**, es un impuesto que se debe pagar por la mayoría de los artículos que se compran. La importancia de su cálculo radica en que las empresas o las personas físicas, al pagar impuestos, lo deben contemplar para la presentación de sus declaraciones. Nótese como al pedir factura por una compra, el IVA siempre debe estar desglosado para que ésta sea válida. Al momento de elaborar este texto, el IVA es del 15%.

Ejemplo 3.29 El precio de un automóvil sin IVA es de $120,000.
a) ¿Cuánto se paga por concepto de IVA?
b) ¿Cuál debe ser el precio final de éste con todo e impuesto?

El impuesto es del 15% por lo que el precio final debe ser un 15% mayor al precio sin IVA.

a) El impuesto se calcula multiplicando la tasa de IVA por el precio:

$$(\mathrm{P})(\mathrm{IVA}) = (120{,}000)(0.15) = 18{,}000$$

b) El precio final se obtiene de sumarle al precio el impuesto:

$$\mathrm{PF} = 120{,}000 + 18{,}000 = 138{,}000$$

El precio final al considerarse el IVA, puede ser obtenido directamente mediante la relación:

$$\mathrm{PF} = \mathrm{P}(1 + \mathrm{IVA}) \qquad \textbf{3.12}$$

Donde:

PF : precio final
P : precio sin impuesto
IVA : tasa impositiva del 15%

Ejemplo 3.30 Calcular el precio final y el impuesto que se paga por una recámara, si su precio sin IVA es de $4,500.

Para calcular el precio final directamente utilizando la ecuación 3.12:

$$\mathrm{PF} = (4{,}500)(1 + 0.15) = 5{,}175$$

Y el impuesto sería:

$$\mathrm{PF} - \mathrm{P} = 5{,}175 - 4{,}500 = 675$$

Cabe aclarar que **el IVA se calcula sobre el precio sin impuesto y no sobre el precio final**.

Ejemplo 3.31 El precio de un televisor con todo e IVA fue de $3,105. Encontrar el impuesto pagado por concepto de IVA.

Sería incorrecto multiplicar los $3,105 por la tasa impositiva para calcular lo que se pagó de impuesto, ya que esta cantidad ya tiene el impuesto incluido. Despéjese el precio sin impuesto de la ecuación 3.12:

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{PF}}{1 + \mathrm{IVA}} = \frac{3{,}105}{1 + 0.15} = 2{,}700$$

El impuesto es la diferencia entre ambos precios, por lo tanto:

$$3{,}105 - 2{,}700 = 405$$

Véase que los $405 son el 15% de $2,700, que es el precio sin impuesto y sobre el cual debe ser calculado el IVA.

Cuando en el precio de un artículo existen descuentos, primero se calculan éstos y hasta el final debe ser calculado el IVA; dicho de otro modo, el IVA se calcula una vez que se tiene el precio definitivo.

Ejemplo 3.32 Una sala con precio de $6,700 (sin IVA incluido) tiene un descuento del 20%. ¿Cuál es el impuesto y el valor final de la sala?

Antes de calcular el impuesto, todos los descuentos deben ser aplicados. Así, el precio con el descuento del 20% pero sin IVA es:

$$\mathrm{P} = 6{,}700(1 - 0.2) = 5{,}360$$

El impuesto debe ser cargado a los $5,360:

$$(5{,}360)(0.15) = 804$$

y el precio final es:

$$\text{PF} = 5{,}360 + 804 = 6{,}164$$

En la práctica, los precios que aparecen en los artículos ya tienen el IVA incluido, por lo que si el artículo tiene algún tipo de descuento basta con aplicarle el descuento para saber el precio final con todo e IVA.

Ejemplo 3.33 Un escritorio que vale $12,000 (con IVA incluido) posee dos descuentos: uno del 5 y el otro del 15%:

a) encontrar el precio final.

b) calcular el impuesto pagado en la compra.

a) El precio final se calcula directamente de los $12,000. Aplicando los dos descuentos:

$$\text{PF} = (12{,}000)(1 - 0.05)(1 - 0.15) = 9{,}690$$

Este precio sería el que pagaría el consumidor con todo e IVA por el escritorio.

b) Para calcular el impuesto hay que encontrar primeramente el precio sin éste. Utilizando 3.12 y despejando el precio sin IVA:

$$\text{P} = \frac{\text{PF}}{1 + \text{IVA}} = \frac{9{,}690}{1 + 0.15} = 8{,}426.09$$

Finalmente, el impuesto que se paga es:

$$\textit{Impuesto} = 9{,}690 - 8{,}426.09 = 1{,}263.91$$

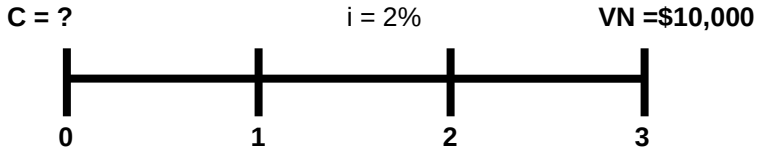
CASO DE ESTUDIO

La tasa de descuento, una forma de encarecer un préstamo.

Durante el presente capítulo la tasa de descuento se manejó como una tasa de interés que se cobra por adelantado. En realidad la tasa de descuento surgió de manera natural al momento que se le aplican los intereses al valor nominal. Para ello véase el siguiente ejemplo:

Un pagaré que vence dentro de tres meses tiene un valor nominal de $10,000 y se quiere vender a una institución financiera. La institución financiera acepta comprar dicho pagaré y cobra una tasa de interés del 2% mensual.

Nótese que la institución financiera no especifica que va a cobrar una tasa de descuento ni de interés, pero fija una tasa del 2%. Como a ésta no le interesa la cantidad que originalmente se prestó por el pagaré, sino la cantidad que va a recibir dentro de tres meses, entonces aplica el 2% sobre los $10,000 que tiene el valor nominal del pagaré.



Los intereses que cobra en un mes son:

$$\text{Intereses} = (10{,}000)(0.02) = 100$$

Como los intereses son constantes, entonces los intereses cobrados en los tres meses son de $300, por lo que la institución financiera ofrecería por el pagaré:

$$\text{Valor descontado} = 10{,}000 - 300 = 9{,}700$$

En principio, parece ser que se está cobrando una tasa de interés, pero se le está aplicando al monto, ya que es la única cantidad que está explícita. Si este ejemplo se resuelve con tasa de descuento, el valor descontado del pagaré quedaría:

$$\text{Valor descontado} = 10{,}000[1 - (0.02)(3)] = 9{,}700$$

Este es el mismo resultado que el obtenido con el procedimiento anterior, por lo que podemos concluir que aunque no se especifique que se está cobrando una tasa de descuento, al momento que una tasa se le aplica a un monto, entonces se está aplicando una tasa de descuento y se están cobrando los intereses por anticipado, y se está encareciendo la transacción financiera.

Ejercicios

3.2 Tasa de descuento.

1 Se solicita un préstamo de $1,300 por un año donde los intereses deben ser pagados por adelantado. Si la tasa de descuento cobrada es del 27%:
a) calcular los intereses.
b) calcular la cantidad que realmente es prestada.

2 En un préstamo de un semestre, la cantidad devuelta fue de $4,980. Si la tasa de descuento cobrada fue del 13% semestral, ¿cuál fue el préstamo?

3 Si se prestan $900 y se devuelven $940 en un mes, ¿qué tasa de descuento se cobró?

4 Se cobran por adelantado $560 en un año por concepto de intereses. Si se cobra una tasa de descuento del 15%, ¿cuál es el monto de la operación?

5 El capital en una transacción financiera fue de $31,000 y el monto de $32,500, ¿cuál fue la tasa de descuento en el periodo?

6 Se pagaron por adelantado $2,400 por concepto de intereses. Si el préstamo fue a un semestre cobrándose una tasa de descuento del 16% semestral, ¿de cuánto fue el préstamo?

3.3 Relación entre la tasa de interés y la tasa de descuento

7 Se invierten $4,000 y se generan en total $300 por intereses en un mes. Calcular:
a) la tasa de interés.
b) la tasa de descuento.

8 ¿Qué tasas de descuento les corresponden a las siguientes tasas de interés?
a) 20%.
b) 40%.
c) 70%.

9 Se tiene una tasa de descuento anual, si se quisiera calcular su tasa de interés equivalente, ¿cuál debería tener un mayor valor numérico? ¿Por qué?

10 Si una inversión de $3,500 produce un monto de $4,600 en un año, ¿qué tasa de descuento se gana?

11 ¿Qué tasa produce mayores intereses en un periodo, una de descuento del 24% o una de interés del 30%?

3.4 Valor presente con tasa de descuento.

12 En un préstamo la cantidad que debe ser pagada al cabo de 15 meses es de $7,300, si la tasa de descuento cobrada es del 18% anual, ¿qué cantidad se prestó originalmente?

13 Un pagaré que vence en 47 días tiene un valor nominal de $12,000, y el día de hoy es descontado a una tasa de descuento del 2.3% mensual. ¿Cuál es el valor descontado del pagaré el día de hoy?

14 Se firma un pagaré a 100 días por una deuda de $5,300, a una tasa de interés simple del 30% anual. Pasados 40 días se decide descontar el pagaré con una tasa de descuento del 28% anual, calcular el valor descontado del pagaré.

15 En un préstamo a 52 días se cobraron $742 por concepto de intereses, si se cobró una tasa de descuento del 20% anual, ¿cuáles fueron el capital y el monto de la operación?

16 Se prestan $95,300 y se liquidan $97,200 al cabo de 7 meses, ¿qué tasa de descuento anual se aplicó?

17 El valor nominal de un pagaré es de $6,000. Si se descontó a una tasa de descuento del 2% mensual y se pagaron $5,630 por dicho pagaré, ¿cuánto tiempo antes de su vencimiento se descontó el pagaré?

18 Los intereses cobrados en un préstamo fueron de $3,500. Si la cantidad pagada al cabo de 130 días fue de $102,300, ¿qué tasa de descuento mensual se cobró?

19 Se sabe que un instrumento financiero dentro de 182 días pagará $100. Si la tasa de descuento que ofrece el instrumento es del 19% anual y se considera el año de 360 días (interés comercial), ¿en cuánto debe ser vendido dicho instrumento?

3.5 Monto o valor futuro con tasa de descuento.

20 El capital prestado es de $2,300. Si se cobra una tasa de descuento del 10% anual durante 8 meses:
a) ¿cuál debe ser la cantidad pagada al final del plazo?
b) ¿cuáles fueron los intereses?

21 Se descuenta un pagaré en $82,300 5 meses antes de su vencimiento, a una tasa de descuento del 30% anual. ¿Cuál debió ser su valor nominal?

22 Se necesitan $5,000 en este momento, por lo que se solicita dicha cantidad para pagarse dentro de 47 días, cobrándose una tasa de descuento del 2.2% mensual. Calcular la cantidad que debe ser devuelta.

23 Se invierte una cantidad el día de hoy a una tasa de descuento del 20% anual. Si los intereses que genera dicha inversión a 4 meses serán de $445, ¿qué cantidad se invierte hoy?

24 ¿En cuánto tiempo se duplica un capital si se invierte a una tasa de descuento del 25% anual?

25 Por una deuda se firmó un pagaré a 6 meses, a una tasa de interés simple del 3.1% mensual. Faltando 2 meses para su vencimiento se decide descontar el pagaré a una tasa de descuento del 2.9% mensual. Si el valor descontado del pagaré fue $32,564, ¿cuál fue el valor de la deuda originalmente?

26 Un instrumento financiero se compra el día de hoy en $9.8546, donde éste ofrece una tasa de descuento del 18.7% anual. Si el instrumento vence dentro de 28 días, ¿cuál será el valor del instrumento al vencimiento?

3.6 Comisiones y descuentos

27 Cierto artículo con valor de $2,000 se ofrece con un descuento del 30%. ¿Cuál es el precio del bien con descuento incluido?

28 Por una grabadora que tenía un descuento del 25% se terminaron pagando $1,115, ¿qué precio tenía originalmente?.

29 Una tienda ofrece descuentos del 20% y 5% por un artículo con valor de $4,000.
a) ¿Cuál debe ser el precio final del artículo?
b) ¿Cuál debe ser el descuento único equivalente?

30 Una raqueta de tenis que tenía un precio de lista de $3,200 costó con 2 descuentos incluidos $2,304. Si uno de los descuentos fue del 20%, ¿de cuánto fue el otro descuento?

31 Un par de zapatos fue comprado con un descuento de $700. Si los zapatos tenían 2 descuentos del 15% y 10%, ¿cuál era el valor original de los zapatos?

32 Se paga por un comedor la cantidad de $7,200. Si el IVA es de un 15%, ¿cuál es el impuesto que se paga por el comedor?

33 Una bicicleta que tiene un precio de $5,250 con IVA incluido, se ofrece con un descuento del 20%. Si el IVA aplicado es de un 15%:
a) ¿cuál es el precio final de la bicicleta?
b) ¿cuánto se pagó de impuesto?

34 Se paga por un traje un precio final de $3,500 con todo e IVA. Si el traje tenía un descuento del 10%, ¿cuál era el precio del traje sin IVA y sin descuento?

35 Una sala se pagará mediante 2 pagos iguales de $2,200 al mes y a los 3 meses, con una tasa de interés del 2% mensual. Si la sala se hubiera pagado de contado, calcular el impuesto que se hubiera pagado por concepto de IVA.

Problemas tipo examen

1 Si tú vas a prestar dinero un año y estás eligiendo entre cobrar una tasa de descuento del 30% y una de interés del 37%, ¿cuál escogerías?

2 Un préstamo a 9 meses cobra por concepto de intereses $270, a una tasa de descuento del 36% anual, ¿qué cantidad se prestó?

3 Un pagaré se descuenta 39 días antes de su vencimiento en $7,322, a una tasa de descuento del 1.7% mensual. Si el pagaré se firmó con un vencimiento original de 3 meses a una tasa de interés del 24% anual, encontrar el valor de la deuda por la que se firmó el pagaré.

4 El precio en mostrador de un escritorio es de $12,370 con el IVA incluido. Si se ofrece con descuentos del 15% y del 10%:
a) calcular el descuento único equivalente.
b) calcular el impuesto que se paga por el escritorio considerando ambos descuentos.

5 Un librero se ofrece con un 20% de enganche y dos pagos de $1,300 y $1,500 a los 45 y 100 días respectivamente. Si la tasa de interés cobrada es del 35%, calcular el impuesto que se cobraría considerando que el librero se paga de contado.

CAPÍTULO **4**

INTERÉS COMPUESTO

4.1 Introducción y conceptos.

En el capítulo 2 se introdujo el interés simple cuya principal característica era que al invertir un capital cierto número de periodos, no existía la reinversión de intereses. El problema que presenta el interés simple es entonces, que si una persona decidiera mantener su inversión con todo e intereses, el interés simple no es capaz de calcular el monto. Para enfrentar esta situación (el caso de reinversión de intereses) está precisamente el interés compuesto. Para el caso del interés compuesto se realizan los siguientes supuestos:

Supuestos del interés compuesto:

1 **Los intereses que se ganan periodo a periodo son reinvertidos.** Para calcular los intereses en cualquier periodo se tomará como base la cantidad invertida al inicio del periodo: en el primer periodo se toma en cuenta el capital inicial; para el segundo periodo los intereses están en función del monto al final del primer periodo; en el tercer periodo los intereses se calculan a partir del monto del segundo periodo y a sí sucesivamente.

2 **Al capital inicial no se le retira ni se le aumenta más capital.** El crecimiento del monto se debe únicamente a los intereses generados.

3 **La tasa de interés periodo a periodo es constante**. Si se invierte un capital a 5 meses y se cobra una tasa mensual se supone que la tasa es la misma para cada uno de los meses.

La diferencia entre el interés simple y el compuesto es que en el interés simple, los intereses en cualquier periodo están en función del capital inicial, y en el interés compuesto como se van capitalizando los intereses, la cantidad sobre la cual se calculan los intereses cada vez va siendo mayor. Para calcular los intereses en cualquier periodo se multiplica el capital al inicio del periodo por la tasa de interés.

4.2 Monto, valor acumulado o valor futuro.

Para calcular el monto con interés compuesto cuando se invierte a más de un periodo, hay que considerar la reinversión de intereses. Para ilustrar el mecanismo se utilizará el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1 Un capital de $100 se invierte a una tasa de interés anual del 20%. Si el plazo es de 3 años, ¿cuánto se acumulará?

Como hemos visto hasta ahora, el monto para el primer año es:

$$M_1 = 100\,(1+0.20) = 120$$

donde los intereses generados en el primer año son por $20. Para el segundo año, los intereses se calculan tomando como base los $120 que es el capital más los intereses. Los intereses en el primer periodo son:

$$I_1 = (100)(0.20) = 20$$

Ahora bien, el monto en el segundo periodo es:

$$M_2 = 120\,(1+0.20) = 144$$

donde los intereses generados en este periodo son:

$$I_2 = (120)\,(0.20) = 24$$

Finalmente, el monto del tercer periodo se calcula sobre los $144 quedando:

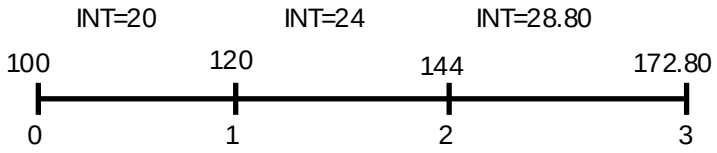
$$M_3 = 144\,(1+0.20) = 172.80$$

donde los intereses generados en este periodo son:

$$I_3 = (144)(0.20) = 28.80$$

Por tanto, el monto al final del tercer año es de $172.80. Como se pudo apreciar, para calcular los intereses en cualquier periodo se toma como base el capital al inicio del mismo, y como este va creciendo, entonces los intereses van aumentando también. La figura 4.1 muestra el comportamiento de la inversión periodo a periodo.

FIG. 4.1



Nótese que **los intereses periodo a periodo en el interés compuesto van aumentando,** ya que como hay reinversión de intereses la cantidad sobre la que se calcula el interés aumenta con el tiempo. Los intereses en el periodo 2 se calculan en función del monto en el periodo 1 (120 en nuestro ejemplo). Para el periodo 3, los intereses se calculan a partir del monto en el periodo 2 (144 en el ejemplo).

Para obtener una fórmula general para el monto se procederá de la siguiente manera:

Si se invierte un capital C a una tasa de interés a un periodo se tendría:

$$M_1 = C(1+i)$$

Para obtener el monto en el segundo periodo se tomaría como base el monto del primer periodo quedando:

$$M_2 = M_1(1+i)$$

Sustituyendo el monto en el primer periodo:

$$M_2 = \left[C(1+i)\right](1+i) = C(1+i)^2$$

Para el monto en el tercer periodo se tendría:

$$M_3 = M_2(1+i)$$

Sustituyendo el valor del monto en el segundo periodo:

$$M_3 = \left[C(1+i)^2\right](1+i) = C(1+i)^3$$

Siguiendo con el proceso el monto al final de t periodos sería:

$$M = C(1+i)^t \qquad \textbf{4.1}$$

Donde:

- **M** : monto, valor acumulado o valor futuro después de t periodos.
- **C** : capital inicial
- **i** : tasa de interés.
- **t** : plazo o número de periodos de inversión.

Al igual que en el interés simple, **debe existir una correspondencia entre la convertibilidad de la tasa y el tiempo manejado**, si la tasa es mensual el tiempo se maneja en meses, si la tasa es anual el tiempo se maneja en años, etc.

Ejemplo 4.2 Se depositan en el banco $3,000 a un plazo de 3 años donde se ofrece una tasa semestral del 15%. Encontrar el monto o valor futuro al cabo de los 3 años utilizando interés compuesto.

En este ejemplo como la tasa de interés es semestral y el plazo de inversión es por 3 años, entonces el número de periodos que se invierte el capital es de 6. Utilizando la ecuación 4.1 donde C=$3,000, i=0.15 y t=6.

$$M = C(1+i)^t = 3{,}000(1.15)^6 = 6{,}939.18$$

Si comparamos este resultado con el obtenido en el ejemplo 2.3 donde se invertía a interés simple (el resultado con interés simple fue $5,700), es fácil notar como a medida que se reinvierten los intereses la cantidad generada será mayor. Por lo tanto, de los ejemplos 4.2 y 2.3 podemos ver que si la tasa es semestral y se invierte un capital a más de un semestre, se obtendrá un mayor monto con interés compuesto que con interés simple por la reinversión de intereses.

Ejemplo 4.3 Se depositan $4,500 a un plazo de 3 años y cinco meses a una tasa de interés del 2% mensual. Encontrar el monto con:

a) interés simple.

b) interés compuesto.

Para este caso como la tasa está mensual, el tiempo deberá ser manejado en meses. 3 años equivalen a 36 meses por lo que 3 años y 5 meses equivalen a 41 meses.

a) Utilizando interés simple se tiene:

$$M = 4{,}500\left[1 + (0.02)(41)\right] = 8{,}190$$

b) Utilizando interés compuesto se tiene:

$$M = C(1+i)^t = 4{,}500(1.02)^{41} = 10{,}134.90$$

La diferencia entre utilizar interés compuesto y simple es en este caso de $1,944.90. Esto se debe, como ya se mencionó anteriormente, a que en interés compuesto hay reinversión de intereses. Los $1,944.90 se pueden ver como los intereses que se generan a partir de los mismos intereses.

En la medida en que el número de periodos de reinversión de intereses sea mayor, más grande será la diferencia que exista entre el monto con interés simple y con interés compuesto. Obsérvese el ejemplo 4.4.

Ejemplo 4.4 Obténgase la diferencia entre los montos calculados con interés simple e interés compuesto, si se invierten $23,500 a una tasa de interés del 20% anual a un plazo de:

a) 1 año
b) 3 años
c) 10 años

Para obtener las diferencias entre los montos, primero hay que calcularlos con interés simple e interés compuesto respectivamente.

a) Si el plazo es un año:

Int. simple: $M = 23{,}500\left[1+(0.2)(1)\right] = 28{,}200$

Int. compuesto: $M = 23{,}500(1+0.2)^{1} = 28{,}200$

Diferencia = $0

b) Si el plazo es 3 años:

Int. simple: $M = 23{,}500\left[1+(0.2)(3)\right] = 37{,}600$

Int. compuesto: $M = 23{,}500(1+0.2)^{3} = 40{,}608$

Diferencia = $3,008

c) Si el plazo es 10 años:

Int. simple: $M = 23{,}500\left[1+(0.2)(10)\right] = 70{,}500$

Int. compuesto: $M = 23{,}500(1+0.2)^{10} = 145{,}505.81$

Diferencia = $75,005.81

Nótese como en a) no existe diferencia entre interés simple y compuesto, esto es porque en un periodo ambos, interés simple y compuesto, ofrecen un 20% sobre el capital inicial (todavía no hay reinversión de intereses en el interés compuesto). Para b) ya existe diferencia puesto que en el interés compuesto ya se reinvirtieron 2 veces los intereses, y los $3,008 es precisamente la ganancia de intereses sobre intereses.

Finalmente para c) la diferencia es mucho mayor porque la reinversión de intereses es por más tiempo.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente se podría pensar que el interés compuesto siempre calculará un monto mayor que el interés simple, desafortunadamente (o afortunadamente, dependiendo del punto de vista) no siempre es así. Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.5 Se prestan $120,000 a una tasa del 32% anual durante 6 meses. Si se utiliza interés simple y compuesto ¿con cuál se obtiene un mayor pago al cabo de los 6 meses?

En este caso se tiene que el tiempo es igual a 0.5 años por lo que:

Int. simple: $M = 120{,}000\left[1 + (0.32)(0.5)\right] = 139{,}200$

Int. compuesto: $M = 120{,}000(1 + 0.32)^{0.5} = 137{,}869.50$

¡Ahora con interés simple se obtiene un pago mayor que con interés compuesto!

El resultado anterior es bastante sorprendente si consideramos el análisis que habíamos realizado anteriormente, donde con interés compuesto se obtenía un monto mayor. El que el interés compuesto ofrezca un monto mayor que el simple será cierto siempre que el plazo sea mayor que la capitalización de la tasa. Nótese como de los ejemplos 4.1 al 4.4 si la tasa era mensual, el plazo era mayor a un mes y si la tasa era anual, el plazo era mayor a un año (en el caso en que la tasa fue anual y el plazo fue exactamente un año los montos fueron iguales).

Lo que indica lo anterior es que **para que el interés compuesto brinde un mayor monto, la tasa se debe de capitalizar más de una vez** para que haya reinversión de intereses. Si la tasa es mensual el plazo debe ser mayor a un mes, si la tasa es trimestral el plazo debe ser mayor a un trimestre, etc.

Si el plazo corresponde a la capitalización de la tasa (si la tasa es anual el plazo es un año, si la tasa es semestral el plazo es un semestre, etc.) **entonces los montos serán iguales por ambos métodos**.

Si el plazo es menor que la capitalización de la tasa (si la tasa es mensual y el plazo es 20 días o si la tasa es bimestral y el plazo es por 45 días, por ejemplo) **entonces el interés simple ofrece un monto mayor que el compuesto**.

La tabla 4.1 resume el análisis anterior:

TABLA 4.1

	Plazo menor de un periodo	Plazo igual a un periodo	Plazo mayor de un periodo
Monto con Int. simple.	**Mayor**	**Igual**	**Menor**
Monto con Int. compuesto.	**Menor**	**Igual**	**Mayor**

Otra forma para determinar lo establecido en la tabla 4.1 es analizando las fórmulas para monto del interés simple y del compuesto:

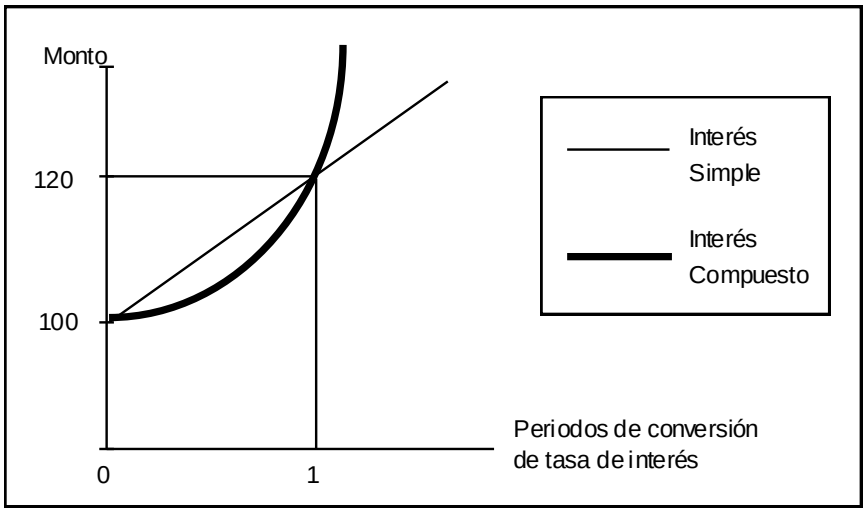
Para interés simple: $M = C(1+it)$

Para interés compuesto: $M = C(1+i)^t$

Si graficáramos el monto contra el tiempo y suponemos un capital de $100 pesos, veremos que a medida que el tiempo es mayor, el monto va a ir creciendo para ambas ecuaciones. Sabiendo que la tasa de interés es constante la fijaremos en un 20% por periodo.

Obsérvese como la ecuación para interés simple es una línea recta, mientras que la ecuación para interés compuesto se comporta de manera exponencial.

FIG 4.2



Como se puede observar en la figura 4.2, el monto para interés simple es mayor siempre que el tiempo esté entre 0 y 1. Si el tiempo es igual a un periodo los montos son iguales a $120 y finalmente, si el tiempo es mayor a un periodo, el monto con interés compuesto es mayor. Véase además que a medida que el tiempo crece siendo mayor que 1, la diferencia entre el interés simple y el compuesto se va incrementando también.

4.3 Valor presente o capital.

En los ejemplos anteriores hemos trabajado con problemas donde la incógnita es el monto; en esta sección nos enfocaremos a calcular el valor presente de una cantidad que ha de recibirse en el futuro, o bien, el capital que ha de invertirse el día de hoy para lograr acumular cierta cantidad en el futuro.

Ejemplo 4.6 Se desean tener $170,000 para comprar un terreno dentro de 3 años. Si la tasa de interés a la que se puede invertir el dinero es del 20% anual, ¿qué cantidad deberá ser depositada hoy para acumular los $170,000?

Para este ejemplo se da como información el monto o valor futuro y se pregunta el capital o valor presente. Despejando de la ecuación de monto para interés compuesto se tiene:

$$M = C(1+i)^t$$

Entonces:

$$C = \frac{M}{(1+i)^t} = M(1+i)^{-t}$$

Sustituyendo la información del ejemplo:

$$C = \frac{170{,}000}{(1+0.2)^3} = 98{,}379.63$$

La información anterior la podemos leer como sigue: el valor presente de $170,000 a tres años, considerando una tasa del 20% anual, es de $98,379.63.

En el interés compuesto, al igual que en el interés simple, si se quiere acumular una cantidad se debe multiplicar por un factor, que en este caso es $(1+i)^t$; mientras que si se desea obtener un valor presente se debe dividir entre dicho factor. De forma general para obtener un valor presente se tiene:

$$C = \frac{M}{(1+i)^t} = M(1+i)^{-t} \qquad \textbf{4.2}$$

Donde:

- **M** : monto, valor acumulado o valor futuro después de t periodos.
- **C** : capital inicial
- **i** : tasa de interés.
- **t** : plazo o número de periodos de inversión.

Recordar que dividir entre $(1+i)^t$ es lo mismo que multiplicar por $(1+i)^{-t}$ por lo que pueden ser utilizadas indistintamente cualquiera de las dos.

Ejemplo 4.7 Una empresa considera que sus ganancias dentro de 5 años serán de 3 millones de pesos, si la tasa de interés contemplada es del 17% semestral, ¿cuál es el valor presente de sus ganancias?

Para obtener el valor presente basta con dividir por el factor de interés compuesto. En este caso como la tasa es semestral y el plazo es por 5 años se tiene que t=10.

$$C = \frac{3{,}000{,}000}{(1.17)^{10}} = 3{,}000{,}000(1.17)^{-10} = 624{,}112.15$$

4.4 La incógnita es el tiempo.

El problema de encontrar el tiempo cuando se conocen las demás variables en el interés compuesto, se reduce a realizar un despeje utilizando logaritmos. Para fines de este texto se mencionan las siguientes **leyes de logaritmos:**

Sean **a** y **b** dos números mayores que cero, y **log** cualquier tipo de logaritmo, entonces:

Ley 1 El logaritmo de una multiplicación es equivalente a la suma de los logaritmos.

$$\log(a*b) = \log(a) + \log(b)$$

Ley 2 El logaritmo de un cociente puede ser expresado como la diferencia de los logaritmos.

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Ley 3 El logaritmo de un número elevado a cualquier potencia (**b puede llegar a ser negativo**) es igual a la potencia multiplicada por el logaritmo del número.

$$\log\left(a^{b}\right) = b\log(a)$$

Esta última regla es la que normalmente se va a utilizar en nuestros ejemplos.

Ley 4 El logaritmo de una suma no es la suma de los logaritmos.

$$\log(a+b) \neq \log(a) + \log(b)$$

Ley 5 No se pueden obtener logaritmos de números negativos. Si c es negativo entonces:

$$\log(c)$$ **no existe.**

Ley 6 Si se calcula el logaritmo de un número que esté entre cero y 1 el resultado será negativo. Si 0 < a < 1 entonces:

$$\log(a)$$ es un número negativo.

Ejemplo 4.8 ¿Para que valor de "n" se cumple la siguiente relación?

$$(1.4)^{n} = 5.37824$$

Como la incógnita que se quiere despejar está en el exponente, su despeje se hace a través de las leyes de logaritmos. Para despejar hay que obtener el logaritmo en ambos lados de la ecuación. El logaritmo que se utilizará es el logaritmo natural, que en las calculadoras aparece con **ln**:

$$\ln(1.4)^{n} = \ln(5.37824)$$

Utilizando la ley 3 de logaritmos:

$$(n)\ln(1.4) = \ln(5.37824)$$

Calculando logaritmos:

$$n(0.33647224) = 1.68236118$$

Despejando "n"

$$n = 5$$

Ejemplo 4.9 Despejar "n" de:

$$(1.18)^{-n} = 0.31392503$$

La incógnita está nuevamente en el exponente y además es negativa. Obteniendo el logaritmo natural:

$$\ln(1.18)^{-n} = \ln(0.31392503)$$

Utilizando la ley 3 de logaritmos:

$$(-n)\ln(1.18) = \ln(0.31392503)$$

Calculando logaritmos:

$$-n\,(0.16551444) = -1.1586011$$

Nótese que el logaritmo de 0.3139 fue negativo porque éste es menor que 1. Despejando "n"

$$-n = -7 \quad \text{donde} \quad n = 7$$

Ejemplo 4.10 Una inversión de $32,765 a una tasa del 1.3% mensual produce un monto de $36,331.7. ¿De cuánto tiempo fue la inversión?

Planteando la ecuación de monto:

$$M = 36{,}331.7 = 32{,}765(1+0.013)^{t}$$

Despejando:

$$\frac{36{,}331.7}{32{,}765} = 1.109 = (1+0.013)^{t}$$

Obteniendo el logaritmo natural:

$$\ln(1.109) = \ln(1+0.013)^{t}$$

Esto equivale a:

$$\ln(1.109) = (t)\ln(1+0.013)$$

Donde:

$$t = \frac{\ln(1.109)}{\ln(1+0.013)} = \frac{0.1033}{0.0129} = 8$$

El tiempo transcurrido es de 8 meses.

Ejemplo 4.11 Se devuelven $9,151.11 el 30 de noviembre por un préstamo de $9,000 a una tasa del 1.8% mensual, ¿en qué fecha se realizó el préstamo?

Teniendo como única incógnita el tiempo, la ecuación quedaría:

$$M = 9{,}151.11 = 9{,}000(1+0.018)^{t}$$

Despejando:

$$\frac{9{,}151.11}{9{,}000} = (1.018)^{t}$$

Obteniendo el logaritmo natural:

$$\ln(1.0168) = t\ \ln(1.018)$$

Donde:

$$t = \frac{\ln(1.0168)}{\ln(1.018)} = \frac{0.01665}{0.01784} = 0.933333$$

Sabemos que la tasa es mensual, por lo que convirtiendo esta fracción a días tenemos:

$$(0.933333)(30) = 28$$

El préstamo se realizó 28 días antes, es decir, el 2 de noviembre.

4.5 Tasas equivalentes.

Hasta el momento el tiempo se ha manejado en correspondencia a la tasa de interés, es decir, si la tasa está mensual el tiempo se maneja en meses o bien si la tasa esta anual el tiempo se maneja en años. Como recordarás en interés simple si el tiempo era 8 meses y tenías una tasa anual había 2 posibilidades: el tiempo manejarlo en años y trabajar una tasa anual, o bien dividir la tasa anual entre 12 y una vez teniendo la tasa mensual, manejar los 8 meses. Con el interés compuesto esto ya no es posible, si la tasa está en años necesariamente el tiempo debe estar en años. Ya no se puede obtener mediante una división la tasa mensual que le corresponde a una tasa anual como se realizaba con interés simple. Este concepto se intentará aclarar mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.12 Por un préstamo de $32,400 se deberá pagar una tasa del 36% anual durante 7 meses, ¿qué cantidad liquidará el préstamo?

La manera correcta de resolver este problema, dado que la tasa es anual, es:

$$M = 32{,}400\,(1.36)^{7/12} = 38{,}765.26$$

Si para este ejemplo se hubiera querido proceder como se había hecho con interés simple dividiendo la tasa anual entre 12 para manejar todo en meses, se hubiera obtenido un resultado incorrecto. Si la tasa es del 36% anual entonces se pudiera pensar que la tasa mensual es de $i_m = 0.36/12 = 0.03$. Entonces t = 7 (porque la tasa ya está en meses).

$$M = 32{,}400\,(1.03)^7 = 39{,}847.91$$

Los resultados como se puede apreciar son distintos, donde la última opción es incorrecta. La forma correcta de resolverlo es considerando una tasa anual del 36% como se hizo originalmente y no una del 3% mensual como se quiso resolver en la segunda opción.

Con lo anterior ya podemos concluir que **el tiempo en interés compuesto se tiene que ajustar a la periodicidad o capitalización de la tasa de interés**. Si la tasa es mensual el tiempo se maneja en meses y si la tasa es anual el tiempo se maneja en años.

Ahora bien, la pregunta que surgiría inmediatamente es que si una tasa mensual del 3% no es equivalente, ó no es lo mismo que una tasa anual del 36%, entonces, ¿cuál es la tasa mensual equivalente a la tasa anual del 36%?

No hay que olvidar que dos tasas son equivalentes cuando un mismo capital invertido el mismo tiempo, produce exactamente el mismo monto contemplando ambas tasas de interés. Partiendo de esto pasemos al siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.13 Se invierten $100 por un año a una tasa de interés del 36% anual, ¿cuál debe ser la tasa mensual equivalente a dicha tasa?

Primeramente calculemos el monto que ha de resultar de la tasa anual:

$$M = 100(1.36) = 136$$

Para encontrar la tasa equivalente mensual se debe considerar que los $100 invertidos un año con la tasa mensual deben producir los mismos $136 que se obtuvieron con la tasa del 36% anual. Se utilizará i_m para denotar una tasa mensual, i_a para denotar una tasa anual, etc. Si se utiliza una tasa mensual entonces t=12 (el tiempo es un año) quedando:

$$M = 100\,(1 + i_m)^{12} = 136$$

Despejando i_m se tiene:

$$(1 + i_m)^{12} = \frac{136}{100} \quad \text{entonces} \quad (1 + i_m) = (1.36)^{1/12}$$

Finalmente:

$$i_m = 0.02595 = 2.595\%$$

Se dice entonces que una tasa del 36% anual es equivalente a una tasa mensual del 2.595%.

De forma general si se quiere convertir una tasa anual a una tasa mensual equivalente se puede tomar como base un plazo de un año y un capital C. Los montos producidos por una tasa anual y una tasa mensual son respectivamente:

$$M = C(1+i_a)$$

y

$$M = C(1+i_m)^{12}$$

Por definición de equivalencia ambos montos deben ser iguales quedando:

$$C(1+i_a) = C(1+i_m)^{12}$$

Como es el mismo capital el que aparece en ambos lados de la ecuación, quedaría finalmente:

$$(1+i_a) = (1+i_m)^{12} \qquad \textbf{4.3}$$

De la ecuación 4.3 podemos apreciar que para que exista una equivalencia, se tiene que considerar el mismo tiempo en ambos lados de la ecuación. Del lado izquierdo una tasa anual se convierte una vez (un año), mientras que del lado derecho una tasa mensual se convierte 12 veces (un año).

Teniendo la relación 4.3 se puede obtener la tasa equivalente entre una mensual y una anual independientemente del capital invertido.

Ejemplo 4.14 Para el ejemplo 4.13 calcular la tasa equivalente mensual haciendo uso de la ecuación de equivalencia.

La tasa anual es del 36%. Utilizando 4.3:

$$(1+i_a) = (1+i_m)^{12} \quad \text{entonces:} \quad (1.36) = (1+i_m)^{12}$$

Despejando i_m:

$$i_m = (1+0.36)^{1/12} - 1 = 0.02595 = 2.595\%$$

En los ejemplos 4.13 y 4.14 las tasas mensuales calculadas son iguales, pero, ¿realmente serán equivalentes una tasa del 36% anual y del 2.595% mensual para periodos diferentes de un año? Para mostrar que ambas tasas son equivalentes se considerará el cálculo de un monto y un valor presente.

Ejemplo 4.15 Calcular el monto de $50,000 a 5 años y el valor presente de $73,000 a 3 años a una tasa del:

a) 36% anual.

b) 2.5954835% mensual (se consideran todos los decimales).

Este ejercicio intenta mostrar que ambas tasas son equivalentes. Para que esto suceda los resultados obtenidos en cada inciso deben ser los mismos.

a) Utilizando un 36% anual.

Monto: $M = 50{,}000(1.36)^{5} = 232{,}629.37$

Valor presente: $C = \dfrac{73{,}000}{(1.36)^{3}} = 29{,}020.58$

b) Utilizando un 2.5954835% mensual.

Monto: $M = 50{,}000(1.36)^{60} = 232{,}629.37$

Valor presente: $C = \dfrac{73{,}000}{(1.36)^{36}} = 29{,}020.58$

De este ejemplo se desprende que de una ecuación como la 4.3, realmente se obtienen tasas equivalentes independientemente del plazo y capital considerados.

Ejemplo 4.16 ¿Cuál es la tasa equivalente bimestral a una tasa semestral del 10%?

Hay que considerar que en una ecuación de equivalencia es necesario tener el mismo tiempo en ambos lados de la ecuación. La ecuación de equivalencia quedaría como sigue:

$$(1+i_s) = (1+i_b)^{3}$$

La tasa bimestral se convierte 3 veces en un semestre (un semestre tiene 3 bimestres). Sustituyendo i_s=10%.

$$(1+i_b) = (1.10)^{1/3} \quad \text{por tanto:} \quad i_b = 0.03228 = 3.228\%$$

Ejemplo 4.17 Encontrar la tasa equivalente anual a una tasa trimestral del 5%.

Como un año tiene 4 trimestres la ecuación de equivalencia quedaría como sigue:

$$(1+i_t)^4 = (1+i_a)$$

Sustituyendo i_t=0.05 y despejando i_a se tiene:

$$i_a = (1.05)^4 - 1 \quad \text{entonces:} \quad i_a = 0.2155 = 21.55\%$$

La regla para encontrar tasas equivalentes es simple: se colocan en ambos lados de la igualdad las tasas que se desean convertir sumándoles 1 a cada una de ellas. El exponente está en función de las veces que se capitaliza una con respecto de la otra. Una tasa mensual se capitaliza 6 veces en un semestre, una tasa bimestral se capitaliza 6 veces en un año, etc.

Hay casos en donde la capitalización de una tasa con respecto a la otra no es un número entero, tal es el caso de una tasa bimestral con respecto a una tasa trimestral. Para casos como éstos se necesita manejar el exponente fraccionario, o bien encontrar un periodo que contenga a las dos tasas exactamente.

Ejemplo 4.18 Convertir una tasa bimestral del 7% a una tasa trimestral.

El manejar números fraccionarios pudiera llegar a crear un poco de confusión ya que ¿un trimestre cuántos bimestres tiene? En el caso en que no se desee manejar números fraccionarios se procede a encontrar un periodo que contenga exactamente al bimestre y al trimestre, tales son los casos de un semestre y un año.

Un semestre tiene 2 trimestres y 3 bimestres por lo que la ecuación quedaría:

$$(1+i_t)^2 = (1+i_b)^3$$

Sustituyendo i_b=0.07 se tendría:

$$(1+i_t) = (1.07)^{3/2} \quad \text{despejando:} \quad i_t = 0.1068$$

Nótese como al final, la tasa bimestral se capitaliza 3/2=1.5 veces, esto es porque un trimestre tiene un bimestre completo y la mitad de otro.

Si para la conversión se hubiera contemplado un año, la ecuación de equivalencia hubiera quedado como sigue:

$$(1+i_t)^4 = (1+i_b)^6$$

Ya que un año tiene 4 trimestres y 6 bimestres respectivamente. Sustituyendo:

$$(1+i_t) = (1.07)^{6/4} = (1.07)^{3/2} \quad \text{finalmente:} \quad i_t = 0.1068$$

Como ya vimos una tasa del 2% mensual para interés simple es equivalente a una tasa del 24% anual, mientras que para interés compuesto esta relación ya no aplica. Entonces, para interés compuesto la tasa equivalente anual a un 2% mensual es mayor o menor al 24%. ¿Por qué?

Sí no se reinvirtieran intereses, como en el interés simple, una tasa del 2% mensual sería equivalente a una tasa anual del 24%. Para el interés compuesto sabemos que periodo a periodo los intereses se van reinvirtiendo, por lo que para el primer mes se han generado un periodo de intereses, para el segundo mes ya se cobrarán intereses sobre los intereses generados en el primer periodo, para el tercero ya se ganarán intereses sobre los intereses de los 2 periodos anteriores, etc.

Como la tasa anual se capitaliza sólo una vez y la tasa mensual se capitaliza 12 veces, para que puedan ser equivalentes y compensar que la tasa mensual ya se capitalizó un mayor número de veces, la tasa anual equivalente al 2% mensual deberá ser mayor al 24%.

Por lo tanto, si se tuviera una tasa bimestral del 4% y se quiere obtener una tasa semestral equivalente, esta última tendría que ser mayor al 12% para compensar las 3 capitalizaciones de la tasa bimestral.

4.6 Tasas nominales.

En la práctica, casi todas las tasas con las que se llevan a cabo transacciones financieras, se expresan de forma anual, pero algunas instituciones, como los bancos, en sus operaciones necesitan tasas efectivas mensuales. Como ya se vio anteriormente, si se desea convertir una tasa mensual a una tasa anual se requiere de una relación de equivalencia que no es fácil de calcular de manera mental.

En la práctica, para anualizar tasas efectivas de interés, se utiliza por convención una simple multiplicación para efectuar el cálculo con mayor rapidez. Al multiplicar una tasa mensual del 2% por 12 se tendría una tasa anual

del 24%. Esta tasa para diferenciarla de la tasa efectiva se conoce con el nombre de tasa nominal convertible mensualmente.

Una tasa nominal no sirve para realizar cálculos de intereses de forma directa, ya que sólo es una forma de representación. Para el caso de la tasa anual del 24% convertible mensualmente, la tasa que en realidad funciona o la tasa que está implícita es del 2% mensual que es con la que verdaderamente se deben efectuar los cálculos.

Así por ejemplo, una tasa anual del 40% convertible semestralmente, implícitamente lleva consigo una tasa efectiva semestral del 20% (la convertibilidad de la tasa marca la pauta de la tasa efectiva que está involucrada).

Para diferenciar una tasa nominal de una tasa efectiva se tiene una notación especial. El símbolo $i^{(12)}$ representa una tasa anual que se capitaliza mensualmente (12 veces en un año). Una $i^{(4)}$ representa una tasa anual que se convierte o capitaliza 4 veces en un año, es decir, de manera trimestral.

Ejemplo 4.19 Expresar en términos nominales una tasa del 6% efectiva trimestral.

Comúnmente las tasas nominales son anuales, por lo que de aquí en adelante si no se dice lo contrario se supondrán las tasas nominales de forma anual.

Un año tiene 4 trimestres por lo que basta con multiplicar la tasa efectiva por 4 para anualizarla. Por tanto, la tasa nominal convertible trimestralmente es:

$$i^{(4)} = (0.06)(4) = 0.24 = 24\%$$

Si en la práctica se ofrece ganar una tasa nominal, para realizar los cálculos primeramente se debe obtener la tasa efectiva correspondiente.

Ejemplo 4.20 Se invierten $32,000 a una tasa del 28% capitalizable mensualmente durante 2 años y medio. ¿Cuál es la cantidad que se retira?

Se ofrece una $i^{(12)} = 0.28$ por lo que la tasa efectiva mensual se obtiene de dividir entre 12 la tasa nominal.

$$i_m = \frac{0.28}{12} = 0.0233$$

Teniendo la tasa mensual efectiva se tiene que 2 años y medio equivalen a 30 meses. Por tanto:

$$M = 32{,}000(1.02333)^{30} = 63{,}923.95$$

Cabe recordar que las tasas nominales son una simple convención y no sirven para realizar cálculos financieros directamente. Para ello se requiere necesariamente de tasas efectivas de interés.

Ejemplo 4.21 Calcular la tasa anual efectiva equivalente a una tasa anual del 48% capitalizable semestralmente.

Antes de empezar a realizar cálculos hay que tener presente que no se puede trabajar equivalencias directamente con tasas nominales, sino que hay que trabajar con tasas efectivas. Lo primero que hay que hacer es convertir $i^{(2)} = 0.48$ a una tasa efectiva semestral:

$$i_s = \frac{0.48}{2} = 0.24$$

Una vez teniendo la tasa efectiva semestral, ahora sí se puede calcular la tasa efectiva anual con una relación de equivalencia:

$$(1+i_a) = (1+i_s)^2 \quad \text{entonces} \quad i_a = 0.5376$$

En el ejemplo 4.21 la tasa anual efectiva resultó ser mayor que la tasa nominal del 48% convertible semestralmente. La respuesta está en que como una $i^{(2)}$ se capitaliza 2 veces al año genera intereses sobre intereses, mientras que una tasa efectiva anual se capitaliza sólo una vez. Para compensar esta ganancia, la tasa efectiva anual debe ser mayor que la tasa nominal para que ofrezcan lo mismo.

En la mayoría de las ocasiones las tasas nominales son anuales, pero no necesariamente es así, por ejemplo se puede tener una tasa semestral convertible mensualmente del 12%. En este caso como la tasa es semestral se convierte 6 veces, por lo que la tasa efectiva mensual es del 2%. La notación que utilizaremos para definir una tasa semestral convertible mensualmente será: $i_s^{(6)} = 0.12$, donde el subíndice s denota una tasa semestral y el superíndice (6) denota que la tasa semestral se capitaliza 6 veces (de forma mensual). De esta forma:

$$i_m = \frac{i_s^{(6)}}{6} = \frac{0.12}{6} = 0.02$$

Ejemplo 4.22 ¿Qué tasa semestral capitalizable trimestralmente es equivalente a una tasa efectiva mensual del 2.5%?

Como la capitalización de la tasa nominal es trimestral, en primer término se debe buscar una tasa efectiva trimestral; para ello se tiene que convertir la tasa efectiva mensual a una tasa efectiva trimestral mediante la relación de equivalencia.

$$(1.025)^3 = (1 + i_t) \quad \text{entonces} \quad i_t = 0.07689$$

Teniendo la tasa trimestral para expresarla de forma semestral (nominal) solo se requiere multiplicarla por 2:

$$i_s^{(2)} = (0.0789)(2) = 0.15378$$

Ejemplo 4.23 Se tiene una $i^{(6)} = 0.27$ encontrar su $i_t^{(3)}$ equivalente.

Por notación, la primera es una tasa anual capitalizable bimestralmente (6 veces) y se pide una tasa trimestral capitalizable mensualmente (3 veces). Para obtener una equivalencia entre 2 tasas nominales, las conversiones necesarias se realizan por medio de las tasas efectivas, **no se puede llevar a cabo una equivalencia entre dos tasas nominales de forma directa**. Por tanto la tasa efectiva bimestral para $i^{(6)} = 0.27$ sería:

$$i_b = \frac{0.27}{6} = 0.045$$

De la tasa bimestral se puede calcular una tasa efectiva mensual:

$$(1.045) = (1 + i_m)^2 \quad \text{entonces} \quad i_m = 0.02225$$

Finalmente, la tasa trimestral convertible mensualmente es:

$$i_t^{(3)} = (0.02225)(3) = 0.06676$$

Para convertir una tasa nominal a otra nominal, es necesario primeramente expresar de forma efectiva la tasa de interés nominal que se conoce. Una vez calculada esta tasa, se tiene que calcular la equivalencia con la tasa efectiva implícita de la que se está buscando (la tasa efectiva implícita está en función de la convertibilidad). Una vez que se tiene la tasa efectiva implícita sólo se multiplica por el número de capitalizaciones durante el periodo considerado para volverla nominal.

Ejemplo 4.24 Se invierten $130,000 a un plazo de 10 años y se reciben $11,905,212.7, ¿cuál fue la tasa anual convertible semestralmente que operó en la inversión?

Se pide una tasa nominal convertible semestralmente por lo que primero se debe calcular la tasa efectiva semestral, para después hacerla nominal. La tasa semestral se obtiene de:

$$11,905,212.7 = 130,000(1+i_s)^{20}$$

Despejando i_s se tiene: $i_s = 0.2534$

Para anualizarla basta multiplicarla por 2 que es el número de capitalizaciones en un año:

$$i^{(2)} = (0.2534)(2) = 0.5068$$

Ejemplo 4.25 Deseas invertir cierta cantidad de dinero y te ofrecen una tasa del 36% convertible mensualmente o bien una tasa semestral del 18% convertible trimestralmente, ¿cuál escogerías?

La primera es una tasa anual que es el doble de la tasa semestral. A primera vista se preferiría la tasa del 36% ya que en un año se tendrían 12 capitalizaciones, mientras que la semestral por ser convertible trimestralmente sólo capitalizaría 4 veces en un año.

Para confirmar lo anterior se puede convertir alguna de las tasas en términos de la otra y se escogería la más alta de las dos. Primeramente se convertirá la $i^{(12)} = 0.36$ a una tasa $i_s^{(2)}$ (semestral convertible trimestralmente).

$$i_m = \frac{0.36}{12} = 0.03$$

De aquí que:

$$(1.03)^3 = (1+i_t) \quad \text{entonces} \quad i_t = 0.0927$$

Finalmente:

$$i_s^{(2)} = (0.0927)(2) = 0.1854$$

Como las dos tasas ya son semestrales convertibles trimestralmente ya se puede hacer una comparación directa. Comparando la tasa obtenida del 18.54% (que es equivalente a una $i^{(12)} = 0.36$), con la que se ofrece del 18% es fácil determinar que es preferida la primera. Por lo tanto se debería aceptar la del 36% convertible mensualmente.

Por otro lado si la tasa que se hubiera convertido fuera la $i_s^{(2)} = 0.18$ a una $i^{(12)}$ se tendría:

$$i_t = \frac{0.18}{2} = 0.09$$

De aquí que:

$$(1+i_m)^3 = (1.09) \quad \text{entonces} \quad i_m = 0.02914$$

Finalmente:

$$i^{(12)} = (0.02914)(12) = 0.3497$$

Esta tasa es más baja que la del 36% convertible mensualmente que se ofrece, por lo que nuevamente la tasa del 36% convertible mensualmente es preferida.

4.7 Ecuaciones de valor con interés compuesto.

La ecuación de valor con interés compuesto tiene exactamente el mismo sentido que con interés simple (sección 2.8), la única diferencia es que ahora se utilizará el monto y valor presente con interés compuesto.

La relación de equivalencia es la misma:

Lo que se debe = Lo que se tiene que pagar

todo evaluado en un mismo momento en el tiempo. Este momento hay que recordar que se conoce con el nombre de fecha focal.

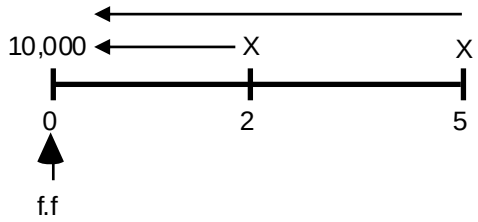
El sistema de valuación es exactamente igual al expuesto en la sección 2.8, con la diferencia de que ahora se utilizarán diferentes funciones de monto y valor presente (se utilizarán las correspondientes al interés compuesto).

Ejemplo 4.26 Un préstamo de $10,000 ha de liquidarse en dos pagos iguales a los 2 y 5 meses. ¿De cuánto deben ser los pagos si se cobra una tasa del 36% capitalizable mensualmente?,

a) tomando fecha focal en cero.
b) tomando fecha focal a los 2 meses.
c) tomando fecha focal a los 5 meses.

La tasa está en términos nominales $i^{(12)} = 0.36$ por lo que la tasa mensual es $i_m = 0.03$.

a) Si la fecha focal está en cero (hoy) el diagrama sería:



Respetando la relación: **lo que se debe = lo que se paga,** evaluado todo en cero porque esta es nuestra fecha focal se tendría:

$$10,000 = \frac{X}{(1.03)^2} + \frac{X}{(1.03)^5}$$

La ecuación se plantea así ya que a los $10,000 no hay que disminuirles ni aumentarles intereses porque ya están sobre la fecha focal. El primer pago de X hay que traerlo a valor presente 2 meses y el segundo hay que regresarlo 5 meses para colocarlos en la fecha focal.

Resolviendo:

$$10,000 = \frac{X}{1.0609} + \frac{X}{1.15927}$$

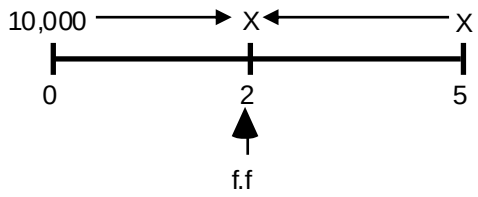
que equivale a:

$$10,000 = 0.9425\,X + 0.8626\,X$$

Finalmente:

$$X = 5,539.54$$

b) Con fecha focal en 2 el diagrama sería:



La ecuación de valor es:

$$10,000(1.03)^2 = X + \frac{X}{(1+0.03)^3}$$

Ahora los $10,000 hay que llevarlos dos meses al futuro, el primer pago no hay que hacerle nada por estar ya en la fecha focal y el segundo pago hay que traerlo a valor presente 3 meses para colocar todas las cantidades en el mes 2, que es nuestra fecha focal. Resolviendo:

$$(10,000)(1.0609) = X + \frac{X}{1.0927}$$

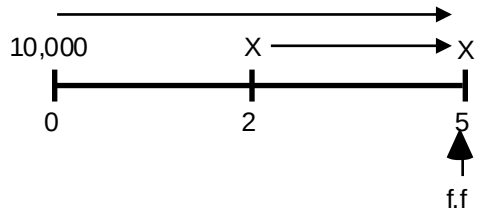
O bien:

$$10,609 = X + 0.9151\ X$$

Despejando x:

$$X = 5,539.54$$

c) El diagrama con fecha focal en 5 sería:



La ecuación de valor estaría dada por:

$$10,000(1.03)^5 = X(1.03)^3 + X$$

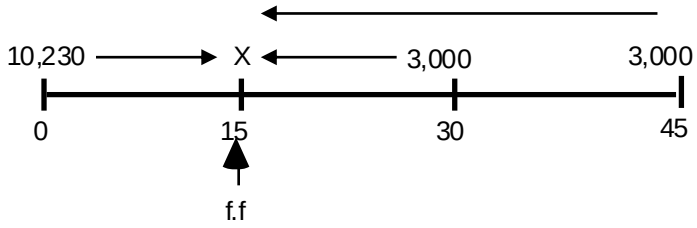
Para llevar todas las cantidades al mes 5, los $10,000 deben ser llevados 5 meses, el primer pago de X debe ser llevado 3 meses y el segundo pago de X se queda sin cambios ya que ya está en la fecha focal. Resolviendo para X:

$$X = 5,539.54$$

Una característica importante del interés compuesto es que independientemente de la fecha focal, el resultado es el mismo; a diferencia del interés simple en donde dependiendo de la fecha focal considerada se tendría un valor distinto. De esta manera la fecha focal con interés compuesto puede ser elegida de tal forma, que se puedan facilitar los cálculos. Se recomienda que la fecha focal se elija donde se encuentre la incógnita a calcular, para facilitar operaciones algebraicas.

Ejemplo 4.27 Por un televisor con valor al contado de $10,230 se dio un primer pago de X a los 15 días, y dos pagos iguales a los 30 y 45 días de $3,000. ¿De cuánto fue el primer pago si la tasa cobrada fue del 20% anual?

El diagrama sería:



La fecha focal se toma a los 15 días porque la variable X no hay que hacerle nada y ya casi estará despejada:

$$10,230(1.20)^{15/360} = X + \frac{3,000}{(1.20)^{15/360}} + \frac{3,000}{(1.20)^{30/360}}$$

Calculando:

$$10,308.01 = X + 2,977.30 + 2,954.76$$

Finalmente

$$X = 4,375.95$$

Nótese cómo al elegir la fecha focal en el momento donde está la variable, el despeje de X es más sencillo.

Ejemplo 4.28 Al comprar una sala se da un enganche del 25% y se acuerda realizar 2 pagos de $1,500 y $2,000 al mes y a los 2 meses respectivamente, cobrándose el 30% convertible mensualmente.

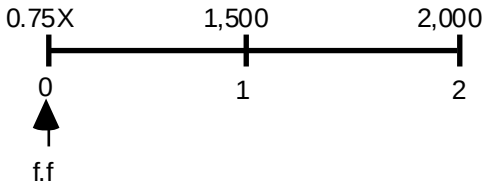
a) Calcular el precio de la sala.

b) Calcular el IVA que se hubiera pagado, en caso de realizar el pago de contado.

La tasa efectiva mensual que se cobra es:

$$i_m = \frac{i^{(12)}}{12} = \frac{0.30}{12} = 0.025$$

a) El precio de la sala se puede calcular resolviendo la ecuación (se utiliza la fecha focal el día de hoy):



Si se da un enganche del 25%, se queda un adeudo del 75%, que debe ser liquidado mediante los 2 pagos. Planteando la ecuación:

$$0.75\,\mathrm{X} = 1,500\,(1.025)^{-1} + 2,000\,(1.025)^{-2}$$

Donde el precio de la sala es:

$$\mathrm{X} = 4,489.39$$

b) El precio de contado de la sala sería 4,489.39. Recordando del capítulo 3 que:

$$\mathrm{PF} = \mathrm{P}(1 + \mathrm{IVA})$$

despejando el precio sin IVA.

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{PF}}{(1+\mathrm{IVA})} = \frac{4,489.39}{1.15} = 3,903.82$$

la diferencia entre el precio final y el precio sin IVA es precisamente lo que se cobró por concepto de IVA:

$$\mathrm{IVA} = 4,489.39 - 3,903.82 = 585.57$$

4.8 Tasa instantánea o fuerza de interés.

Como ya se vio anteriormente una tasa efectiva anual debe ser mayor en valor numérico que una tasa anual convertible semestralmente, para compensar las capitalizaciones de la tasa nominal. Ahora bien si se tiene una tasa del 24% convertible semestralmente o una tasa del 24% convertible mensualmente, ¿A cuál de las dos le corresponderá una mayor tasa efectiva anual? La tasa efectiva será más grande a medida que exista un mayor número de capitalizaciones (hay mayor ganancia de intereses sobre intereses), por lo que en nuestro ejemplo se esperaría que la tasa efectiva que le corresponde a la tasa que se capitaliza mensualmente sea mayor.

Para una $i^{(2)} = 0.24$ la tasa efectiva semestral es de 0.12 y la tasa efectiva anual sería:

$$i = (1.12)^2 - 1 = 0.2544$$

Para una $i^{(12)} = 0.24$ la tasa efectiva mensual sería de 0.02 y la tasa anual:

$$i = (1.02)^{12} - 1 = 0.26824179$$

De esta forma podemos apreciar que a medida que la convertibilidad de la tasa aumente la tasa efectiva anual correspondiente también lo hará. Nótese también que la tasa efectiva semestral en el primer caso fue del 12% mientras que la efectiva mensual fue del 2%, esto es, a medida que la convertibilidad aumenta (de semestres a meses) el periodo se reduce y por ende la tasa efectiva en ese periodo también lo hace.

¿Qué sucederá ahora si consideramos una tasa del 24% convertible cada día? En este caso la tasa efectiva diaria sería: (considerando un año de 360 días)

$$i_d = \frac{0.24}{360} = 0.00067$$

Por tanto la tasa efectiva anual es:

$$i = (1.00067)^{360} - 1 = 0.2711475$$

Es claro entonces que a medida que aumenta la capitalización la tasa efectiva anual crece también, pero qué sucedería si tomáramos una tasa que se convirtiera cada minuto, o cada segundo, ¿la tasa efectiva anual crecería indiscriminadamente, o tendería hacia un valor? Para observarlo tomaremos la tasa anual del 24% convertible cada hora, es decir, que se convierte (360)(24)=8,640 veces. La tasa efectiva cada hora sería:

$$i_{hora} = \frac{0.24}{8{,}640} = 0.0000277$$

Por tanto la tasa efectiva anual es:

$$i = (1.0000277)^{8640} - 1 = 0.27124491$$

La tasa efectiva cada hora ya es muy pequeña, pero al capitalizarla durante todo un año produce una tasa efectiva del 27.1245%. Véase como este resultado es muy similar al obtenido con la capitalización diaria; por lo que podemos intuir que a medida que la capitalización aumenta la tasa efectiva tiende a un valor.

Supóngase ahora que se tiene una tasa del 24% que se capitaliza a cada instante (el caso extremo); de acuerdo a nuestro proceso sabemos que la tasa

efectiva en un instante debe ser muy pequeña, de hecho insignificante, su valor radicará en que se capitalizará un infinito número de veces. La pregunta que surge es ¿qué tasa efectiva anual producirá una tasa del 24% convertible cada instante? Si nuestra intuición fue correcta el valor de ésta ya no debe ser muy lejano a 0.27124491 que fue la tasa que se obtuvo con una capitalización cada hora. El valor exacto al que tiende una tasa del 24% que se capitaliza a cada instante es (el análisis de esta relación se deja para el apéndice al final del capítulo):

$$i = e^{0.24} - 1 = 0.27124915$$

donde e es el número 2.71828183 que aparece en cualquier calculadora científica.

Como se había pronosticado la tasa efectiva anual producida por una tasa que se convierte a cada instante ya fue casi la misma que la producida por una que se convirtió cada hora. Para apreciar mejor los resultados considérese la tabla 4.2.

TABLA 4.2

Tasa Anual del 24% convertible cada:	Periodos de conversión	Tasa efectiva por periodo	Tasa efectiva anual
Semestre	2	0.12	0.2544
Mes	12	0.02	0.2682
Día	360	0.00067	0.2711475
Hora	8640	0.0000277	0.2712448
Instante	infinito	casi cero	0.2712491

La tasa anual convertible cada instante o tasa instantánea a pesar de formar parte del interés compuesto, tiene una notación especial. La tasa instantánea se denota por la letra griega δ (delta) y para el caso considerado en la tabla 4.2 una tasa instantánea del 24% (δ=24%) equivale a una tasa efectiva anual del 27.1249%. De forma general, la relación de equivalencia entre una tasa efectiva anual y una tasa instantánea está dada por* :

$$1 + i = e^{\delta} \qquad \textbf{4.4}$$

* La demostración de esta relación, se encuentra en el apéndice al final del capítulo.

Donde:

- δ : tasa instantánea o fuerza de interés.
- e : es el número 2.718281....
- i : tasa efectiva anual

Una tasa anual que se capitaliza un infinito número de veces por definición es una tasa instantánea. Este es un caso especial del interés compuesto y también se le conoce con el nombre de fuerza de interés o interés continuo.

Ejemplo 4.29 Calcular la tasa anual efectiva equivalente a una tasa instantánea del 50%.

En principio esperaríamos que la tasa efectiva anual fuera mayor al 50% porque la tasa instantánea se convierte un infinito número de veces. Utilizando la ecuación 4.4 para δ=0.50:

$$1+\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\delta} \quad \text{despejando} \quad \mathrm{i}=\mathrm{e}^{0.50}-1=0.6487$$

Una tasa instantánea del 50% es equivalente a una tasa anual del 64.87%

Si se deseara convertir una tasa instantánea a cualquier tasa que no fuera efectiva anual, lo primero que habría que hacer es convertir la tasa instantánea a una tasa efectiva anual, para después proceder como hasta ahora convirtiendo a la tasa requerida.

Ejemplo 4.30 Calcular la tasa semestral convertible mensualmente equivalente a una fuerza de interés del 30%.

Calculando la tasa anual efectiva:

$$\mathrm{i}_{\mathrm{a}}=\mathrm{e}^{0.30}-1=0.349859$$

La tasa mensual estaría dada por:

$$\mathrm{i}_{\mathrm{m}}=(1.349859)^{1/12}-1=0.02531$$

Finalmente la tasa semestral convertible mensualmente es:

$$\mathrm{i}_{\mathrm{s}}^{(6)}=(0.02531)(6)=0.15189$$

En el caso en que se deseara convertir una tasa efectiva anual a una fuerza de interés basta con aplicar logaritmo natural en ambos lados de la ecuación 4.4 resultando:

$$\delta = \ln(1+i) \qquad \textbf{4.5}$$

Donde:

δ : tasa instantánea o fuerza de interés.

ln : es el logaritmo natural

i : tasa efectiva anual

Ejemplo 4.31 Encontrar la fuerza de interés correspondiente a la tasa efectiva anual del 40%.

Tomando la ecuación 4.5

$$\delta = \ln(1+\mathrm{i}) = \ln(1.4) = 0.33647$$

Para calcular un monto cuando se tiene una fuerza de interés no es necesario convertir dicha tasa, puesto que existe una función de monto especial para el interés continuo. Utilizando la ecuación 4.4 podemos obtener la función de monto.

$$1+i = e^{\delta}$$

Elevando ambos términos a la potencia t y multiplicando por C se tiene:

$$\mathrm{C}(1+\mathrm{i})^{\mathrm{t}} = \mathrm{C}\left(\mathrm{e}^{\delta}\right)^{\mathrm{t}} = \mathrm{Ce}^{\delta\,\mathrm{t}}$$

Recuérdese que $C(1+i)^t$ es la función de monto para el interés compuesto por tanto:

$$\mathrm{M} = \mathrm{C}(1+\mathrm{i})^{\mathrm{t}} = \mathrm{Ce}^{\delta\,\mathrm{t}}$$

Específicamente para la fuerza de interés:

$$\mathrm{M} = \mathrm{Ce}^{\delta\,\mathrm{t}} \qquad \textbf{4.6}$$

Donde:

C : capital inicial.

δ : tasa instantánea o fuerza de interés.

t : tiempo en años.

M : monto.

Una aclaración importante es que la tasa instantánea se expresa siempre en términos anuales, por lo que el tiempo debe manejarse en años.

Ejemplo 4.32 Encontrar el valor acumulado de $100 a un año si se invierte a una fuerza de interés del 24%.

Utilizando la ecuación 4.6 con t = 1:

$$M = Ce^{\delta t} = 100\, e^{(0.24)(1)} = 127.124915$$

Nótese que invertir $100 a una delta del 24% es lo mismo que invertir a una tasa efectiva anual del 27.124915. Véase la tabla 4.2.

Ejemplo 4.33 Si se invierten $35,000 durante dos años y seis meses a una tasa instantánea del 25%, ¿Cuánto se acumula al final del plazo?

La tasa instantánea siempre se expresa en términos anuales: t = 2.5.

$$M = Ce^{\delta t} = 35,000\, e^{(0.25)(2.5)} = 65,388.60$$

Si se desea calcular un valor presente utilizando la tasa instantánea basta con despejar C de la ecuación 4.6 quedando:

$$C = \frac{M}{e^{\delta t}} = Me^{-\delta t} \qquad \textbf{4.7}$$

Donde:

C : capital inicial.

δ : tasa instantánea.

t : tiempo en años.

M : monto.

De aquí en adelante se utilizará la ecuación $C = Me^{-\delta t}$.

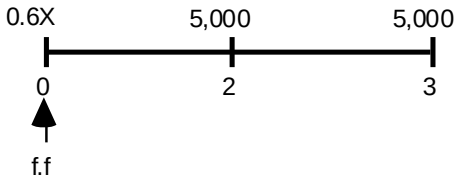
Ejemplo 4.34 ¿Cuánto debe invertirse el día de hoy para acumular $7,300 al cabo de 16 meses si la tasa instantánea es del 21%?.

Como la tasa instantánea es anual entonces $t = 16/12$. Utilizando 4.7:

$$C = Me^{-\delta t} = 7,300\, e^{-(0.21)(16/12)} = 5,517.22$$

Ejemplo 4.35 En la compra de una computadora se da un enganche del 40% y el resto se pacta liquidarlo en 2 pagos iguales de $5,000 a 2 y 3 meses cobrándose una fuerza de interés del 30%, ¿cuál es el precio de la computadora?

Un diagrama de tiempo quedaría:



Como ya se pago un 40% de enganche entonces solo resta un 60% del valor de la computadora por pagar. Si X es el valor de la computadora entonces el adeudo es representado por 0.6X en el diagrama de tiempo. La ecuación quedaría entonces:

$$0.6\,\mathrm{X} = 5,000\,\mathrm{e}^{-(0.30)(2/12)} + 5,000\,\mathrm{e}^{-(0.30)(3/12)}$$

Despejando X:

$$\mathrm{X} = \frac{4,756.147 + 4,638.717}{0.6} = 15,658.11$$

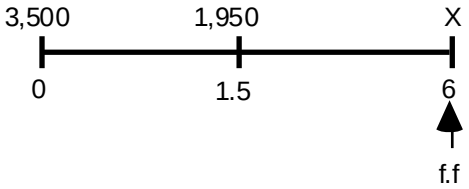
Es importante aclarar que la fuerza de interés cuando δ es constante, es un caso especial del interés compuesto, por lo que independientemente de la fecha focal que se elija en una ecuación de valor el resultado será el mismo.

Ejemplo 4.36 Para saldar una deuda de $3,500 contraída hace 6 meses resta solamente el pago del día de hoy. Si ya se realizó un pago por $1,950 al mes y medio del préstamo y la tasa cobrada es del 25% convertible mensualmente, ¿de cuánto debe ser el pago?

a) Utilizar interés compuesto.

b) Utilizar interés continuo (fuerza de interés).

a) Se tiene que $i_a^{(12)} = 0.25$ por lo que la tasa efectiva mensual es $i_m = 0.02083$. El diagrama de tiempo sería:



La fecha focal se escogió donde está la incógnita para facilitar un poco las operaciones algebraicas. La ecuación es:

$$3,500(1.02083)^6 = 1,950(1.020083)^{4.5} + \mathrm{X}$$

Por tanto:

$$\mathrm{X} = \$1,821.34$$

b) Para utilizar interés continuo es indispensable convertir la tasa de interés a fuerza de interés. Como la fuerza de interés se expresa en términos anuales se debe convertir la tasa de interés mensual a una tasa efectiva anual, de esta manera:

$$i_a = (1.02083)^{12} - 1 = 0.2807$$

La fuerza de interés correspondiente es:

$$\delta = \ln(1.2807) = 0.2474$$

Teniendo ya la tasa instantánea, la ecuación de valor sería:

$$3,500\, e^{(0.2475)(6/12)} = 1,950\, e^{(0.2475)(4.5/12)} + X$$

Despejando X:

$$X = 1,824.34$$

Actualmente el interés continuo ha cobrado relevancia al estar siendo empleado en la valoración de instrumentos financieros complejos; tal es el caso de los productos derivados, puesto que las operaciones matemáticas como la derivada y la integral, se facilitan en gran medida con el uso de sus correspondientes funciones de monto y valor presente con interés continuo.

4.9 Interés compuesto con tasas diferentes.

Hasta el momento se ha supuesto que las tasas periodo a periodo son constantes, pero en la realidad esto nunca o casi nunca sucede. En países como México, en ciertos periodos las tasas han sido tan inestables que en una misma semana éstas llegan a fluctuar de manera considerable. En esta sección veremos cómo calcular valores acumulados y presentes cuando las tasas de interés van siendo diferentes periodo a periodo.

Los valores futuros y presentes con tasas variables tienen un manejo especial que es muy similar a lo revisado anteriormente. Se ilustrará la mecánica con un ejemplo.

Ejemplo 4.37 Hace 3 años se depositaron $5,000. Las tasas que se ofrecieron año con año fueron las siguientes: 20%, 25% y 21% respectivamente. ¿Cuánto fue lo que se obtuvo al cabo de los 3 años?

Para calcular el monto se tienen que tomar en cuenta las 3 tasas. Paso a paso tendríamos que ver cuánto es lo que se obtiene al final del primer año, esto es:

$$M = (5,000)(1.20) = 6,000$$

Esta cantidad se obtendría si se hubiera invertido sólo un año. Para el segundo año se invierten ahora los $6,000 a una tasa del 25% que es la que imperó en ese año quedando:

$$M = (6,000)(1.25) = 7,500$$

Finalmente, el monto a los tres años se calcula invirtiendo los $7,500 a una tasa del 21%:

$$M = (7,500)(1.21) = 9,075$$

Este resultado se hubiera podido obtener de forma directa multiplicando a la vez por los factores de monto año por año quedando:

$$M = (5,000)(1.20)(1.25)(1.21) = 9,075$$

Al multiplicar los $5,000 por 1.20 se obtiene el monto al final del primer año, si se multiplica ahora por 1.25 se obtiene el monto de los $5,000 al cabo de 2 años y finalmente al multiplicar el resultado de las anteriores operaciones por 1.21 se obtiene el monto al cabo de los 3 años.

Del ejemplo 4.37 podemos ver que lo único que tenemos que hacer para calcular un monto cuando tenemos diferentes tasas, es sumarle uno a cada una de ellas y multiplicar todos estos factores. De forma general se tendría:

$$M = C(1+i_1)(1+i_2)...(1+i_n) \qquad \textbf{4.8}$$

Donde:

C : capital inicial.

M : monto

i_1 : tasa de interés para el primer periodo.

i_2 : tasa de interés para el segundo periodo.

i_n : tasa de interés para el último periodo.

Ejemplo 4.38 Un préstamo de $35,000 que se efectuó hace 5 meses se acaba de liquidar. Si las tasas mensuales que se cobraron respectivamente fueron de 2.5%, 2.8%, 2.6%, 2.7% y 2.9%, ¿cuánto fue lo que se terminó pagando por el préstamo?

Utilizando la ecuación 4.8 tenemos:

$$M = 35,000(1.025)(1.028)(1.026)(1.027)(1.029)$$

Donde:

$$M = 39,986.94$$

Obsérvese como en la ecuación 4.8, si las "n" tasas fueran todas iguales se tendría:

$$M = C(1+i)(1+i)...(1+i) = (1+i)^n$$

que es precisamente la ecuación de monto que habíamos manejado hasta ahora. Para encontrar el valor presente con tasas diferentes sólo resta despejar el capital de la ecuación 4.8 quedando:

$$C = \frac{M}{(1+i_1)(1+i_2)...(1+i_n)} \qquad \textbf{4.9}$$

Donde:

C	:	capital inicial.
M	:	monto
i_1	:	tasa de interés para el primer periodo.
i_2	:	tasa de interés para el segundo periodo.
i_n	:	tasa de interés para el último periodo.

Para calcular el valor presente basta con dividir entre los factores de descuento correspondientes a cada tasa de interés.

Ejemplo 4.39 Al invertir cierto capital se acumularon durante 2 años $7,342, si las tasas que se ofrecieron fueron de 30%, 25%, 28% y 25% todas nominales convertibles semestralmente, ¿cuál fue la inversión inicial?

Como las tasas son nominales, las tasas efectivas semestrales fueron: 15%, 12.5%, 14% y 12.5%. Entonces:

$$C = \frac{7,342}{(1.15)(1.125)(1.14)(1.125)} = 4,424.93$$

Ejemplo 4.40 Un inversionista duplicó su dinero después de 3 años de invertirlo. Si las tasas anuales ganadas los primeros dos años fueron del 27% y 29%, ¿cuál fue la tasa ganada el tercer año?

Sea X el dinero invertido al inicio del plazo, entonces la cantidad retirada es 2X. Utilizando la ecuación 4.8:

$$2X = X(1.27)(1.29)(1+i)$$

Despejando la tasa de interés:

$$i = \frac{2}{(1.27)(1.29)} - 1 = 0.2208$$

4.10 Inflación.

Como se estudió en el capítulo 1, la inflación es el parámetro que realmente determina el valor del dinero en el tiempo. En esta sección revisaremos nuevamente la inflación debido al comportamiento análogo que tiene con el interés compuesto para tasas diferentes. Para mostrarlo veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.41 Una silla costaba hace 3 años $130, si la inflación ha sido del 20% el primer año, 25% el segundo y 23% el tercer año y el valor de la silla se ha ajustado exactamente a la inflación, ¿cuánto cuesta ahora la misma silla?

Como la silla se ha ajustado exactamente a la inflación después de un año el precio de la silla fue:

$$P_1 = (130)(1.20) = 156$$

El segundo año el precio fue:

$$P_2 = (156)(1.25) = 195$$

Finalmente el tercer año el precio es:

$$P_3 = (195)(1.23) = 239.85$$

Hubiéramos obtenido el resultado directamente utilizando la ecuación 4.8 y sustituyendo la inflación por la tasa de interés:

$$P_3 = (130)(1.20)(1.25)(1.23) = 239.85$$

Ejemplo 4.42 Encontrar el precio proyectado a 5 años de un bien cuyo precio actualmente es de $1,375 si se supone una inflación constante del 16% anual para los 5 años.

Como la tasa de inflación es constante se puede utilizar la función de monto directamente.

$$M = (1,375)(1.16)^5 = 2,887.97$$

En ocasiones es conveniente quitarles la inflación o "deflactar" los precios. Para esto (como en interés compuesto) sólo es necesario dividir entre el factor de descuento, pero considerando la inflación.

Ejemplo 4.43 Hoy un pantalón cuesta $425, si la inflación el último año fue del 19%, ¿cuál era el precio del pantalón hace un año?

En este caso lo que vamos a hacer es deflactar el precio del pantalón o quitarle la inflación de un año.

$$P = \frac{425}{1.19} = 357.14$$

Ejemplo 4.44 ¿Cuánto costaba el cine hace 10 años, si supone que hoy cuesta $50 y existió una inflación constante del 9% por año?

Hay que deflactar los $50 por 10 años quedando:

$$P = \frac{50}{(1.09)^{10}} = 21.12$$

Algunas veces escuchamos acerca de la tasa de inflación promedio que prevaleció durante un determinado tiempo. Hay que tener mucho cuidado en este punto ya que es diferente tener una tasa de inflación promedio a tener una tasa de inflación equivalente, aunque algunas personas lo manejan de manera indistinta. Una tasa promedio es simplemente la suma de las tasas divididas entre el total de tasas consideradas, mientras que la tasa equivalente es la tasa que siendo constante produce el mismo resultado que todas las que se presentaron en dicho periodo. Para mayor claridad véase el siguiente ejemplo donde π es la representación de la tasa de inflación:

Ejemplo 4.45 Las tasas de inflación en los últimos 3 años fueron del 17%, 14% y 13%.

a) Calcular la tasa de inflación promedio.

b) Calcular la tasa de inflación equivalente.

a) Para calcular la tasa de inflación promedio basta con sumar las tasas de inflación y dividirlas entre 3.

$$\pi = \frac{0.17 + 0.14 + 0.13}{3} = 0.1467$$

b) Para calcular la tasa de inflación equivalente utilizaremos el concepto de tasas equivalentes, donde ésta debe dar la misma inflación acumulada que las tasas que en realidad se presentaron:

$$(1+\pi)^3 = (1.17)(1.14)(1.13)$$

En ambos lados de la ecuación tenemos la inflación acumulada 3 años: del lado izquierdo con una inflación constante, mientras que del lado derecho con inflaciones diferentes.

Despejando la inflación:

$$(1+\pi)=(1.507194)^{1/3}$$

Donde:

$$\pi = 0.1465$$

Al hablar de la inflación promedio y de la equivalente son cosas diferentes, aunque en la práctica a veces se manejen de forma indistinta, por lo que hay que tener cuidado en su uso e interpretación.

Recordemos ahora que en el capítulo 1 se mencionó que cuando se ofrecía una tasa de interés, podría haber una ganancia o pérdida real dependiendo de la inflación. La tasa de interés que ofrecen las instituciones financieras se les conoce con el nombre de tasas nominales (no confundir con el término utilizado para denotar la convertibilidad de la tasa). Las tasas nominales llevan de manera implícita la inflación y una ganancia o pérdida real. Haciendo memoria, si la tasa ofrecida por un banco era del 7% y la inflación era del 4%, la tasa real no era del 3% sino del 2.88% (ver ejemplo 1.12).

Vamos a encontrar en este momento una expresión que relacione a la tasa nominal, a la tasa de inflación y a la tasa real.

Ejemplo 4.46 Se tienen $2,000 para invertir a una tasa del 7% semestral, si la inflación fuera del 4% en el semestre, ¿cuál sería la tasa real?

Este ejemplo es similar al ejemplo 1.12. A diferencia de este último donde para obtener la ganancia real la comparación del dinero se hizo al final del periodo, ahora la comparación se hará al principio del mismo, es decir, con pesos de hoy.

Si se tienen $2,000 para invertir a un 7%, al final del semestre se tendrían:

$$(2,000)(1.07)=2,140$$

Esta cantidad es la que se recibiría al final del semestre, pero estos pesos ya tienen una inflación del 4%. Si les quitamos la inflación entonces tendríamos la cantidad que recibiríamos al final del semestre, pero medida en pesos de hoy:

$$\frac{2,140}{1.04}=2,057.69231$$

Lo que significaría esta cantidad, es que los $2,140 que se recibirán dentro de un semestre equivalen precisamente a $2,057.69 el día de hoy. Si comparamos estos $2,057.69 con los $2,000 que se prestaron (se pueden comparar ya que ambas cantidades están en pesos de hoy), podemos darnos cuenta que se experimentó una ganancia real.

Para expresar esa ganancia como un porcentaje se tiene que los $2,000 invertidos a una tasa real (porque ya no tiene inflación) deben producir los $2,057.69:

$$(2,000)(1+\mathrm{r}) = 2,057.69231$$

Donde r es la tasa real. Despejando r:

$$\mathrm{r} = 0.0288 = 2.88\%$$

Analizando el procedimiento vemos que los $2,000 se invierten a una tasa de interés del 7%, pero la cantidad recibida al final tiene una inflación. Ahora bien, dicha cantidad debe ser deflactada (se le quita la inflación para saber cuánto se va a recibir pero en pesos de ahora). La ecuación que nos muestra la ganancia o pérdida real para este ejemplo sería:

$$\frac{(2,000)(1.07)}{1.04} = (2,000)(1+\mathrm{r})$$

y despejando la tasa real se tendría el 2.88% de ganancia real.

Generalizando el resultado del ejemplo 4.46 se tendría que la relación entre la tasa nominal, la tasa de inflación y la tasa real es (se elimina la cantidad ya que está en ambos lados de la ecuación):

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1+\pi} = 1+\mathrm{r} \qquad \textbf{4.10}$$

Donde:

i	:	tasa nominal
π	:	tasa de inflación
r	:	tasa real

La ecuación 4.10 suele expresarse como:

$$1+\mathrm{i} = (1+\mathrm{r})(1+\pi) \qquad \textbf{4.11}$$

Esta ecuación establece que la multiplicación de los factores que contienen la tasa real y la inflación debe ser igual al factor que contiene la tasa nominal.

Si se desarrolla la ecuación 4.11 quedaría:

$$\mathrm{i} = \mathrm{r} + \pi + \mathrm{r}\,\pi \qquad \textbf{4.12}$$

De la ecuación 4.12 vemos que la tasa nominal es casi la suma de la inflación y la tasa real, pero hay un factor que no permite que esto sea realmente cierto. Muchas personas utilizan la aproximación:

$$i \approx r + \pi$$

pero hay que tener mucho cuidado, sobre todo cuando la tasa de inflación es alta, ya que a medida que esta crece, la aproximación es cada vez menor.

Ejemplo 4.47 Mientras que la inflación el año pasado fue del 15%, la tasa ofrecida por cierta institución financiera fue del 17%. ¿Cuál fue la tasa real?

Utilizando la ecuación 4.10 tenemos:

$$1 + r = \frac{1+i}{1+\pi} = \frac{1.17}{1.15} = 1.0174$$

Despejando la tasa real se obtiene:

$$r = 1.74\%$$

Ejemplo 4.48 Se ofrecen actualmente tasas del 12% anual, si la inflación esperada es del 13.5%, ¿cuál sería la tasa real esperada?

La tasa real esperada en este caso debe ser negativa, ya que la inflación es mayor a la tasa ofrecida. Esto significa que en realidad hay una pérdida real.

$$1 + r = \frac{1+i}{1+\pi} = \frac{1.12}{1.135} = 0.9868$$

donde la tasa real queda:

$$r = -1.32\%$$

lo que implicaría una pérdida en términos reales.

Hasta el momento se ha visto el manejo de tasas reales para un solo periodo, ¿qué sucede si ahora el plazo es mayor a un periodo? ¿Cómo obtener la tasa real por periodo y cómo obtener la tasa real para todo el plazo?

Recordemos que para obtener la relación a un periodo lo que se hizo fue acumular con la tasa de interés y a esa cantidad quitarle la inflación. Este resultado era precisamente la tasa real. La ecuación era:

$$\frac{1+i}{1+\pi} = 1 + r$$

Para el caso en que se tengan por ejemplo dos tasas de interés anuales y sus correspondientes inflaciones anuales, lo que se tendría que hacer es acumular por dos años con las tasas de interés. Posteriormente se le quita la inflación o se deflacta, pero por 2 años con las 2 inflaciones. Este resultado lleva implícito la tasa real que operó por los 2 años.

Si se quisiera una tasa real anual equivalente, lo que se tendría que hacer es convertir 2 veces esta tasa. La ecuación correspondiente quedaría:

$$\frac{(1+i_1)(1+i_2)}{(1+\pi_1)(1+\pi_2)} = 1+r_p = (1+r)^2 \qquad \textbf{4.13}$$

Donde:

i_1	:	tasa nominal para el primer periodo
i_2	:	tasa nominal para el segundo periodo
π_1	:	tasa de inflación para el primer periodo
π_2	:	tasa de inflación para el segundo periodo
r_p	:	tasa real para todo el plazo (en este caso 2 periodos)
r	:	tasa real por periodo

Ejemplo 4.49 Para una inversión a 2 años se ofrecieron tasas del 21% y 19.5% el primer y segundo año respectivamente. Las inflaciones anuales fueron del 18.5% el primer año y 15% el segundo año.

a) ¿Cuál fue la tasa real que se ganó durante los dos años?

b) ¿Cuál fue la tasa real equivalente que se ganó año por año?

a) Utilizando la primera parte de la ecuación 4.13:

$$1+r_p = \frac{(1+i_1)(1+i_2)}{(1+\pi_1)(1+\pi_2)} = \frac{(1.21)(1.195)}{(1.185)(1.15)} = 1.06105$$

de aquí resulta que la tasa real para los dos años es:

$$r_p = 6.105\%$$

b) Para calcular la tasa real anual se utiliza la segunda parte de la ecuación 4.13:

$$(1+r)^2 = \frac{(1+i_1)(1+i_2)}{(1+\pi_1)(1+\pi_2)} = \frac{(1.21)(1.195)}{(1.185)(1.15)} = 1.06105$$

y la tasa real anual es:

$$r = 3\%$$

Ejemplo 4.50 Ha transcurrido un semestre a partir de que se realizara un depósito pactado a un año. El primer semestre se ofreció una tasa del 9.25% y el segundo ofrece una tasa del 9.7%. La inflación durante el primer semestre fue del 9.15%. Si se espera que la inversión produzca un rendimiento real anual del 2%, ¿cuánto tendría que ser la inflación durante el segundo semestre?

En este caso ya se tiene la tasa real que prevalece durante todo el plazo (los 2 semestres), la incógnita se presenta ahora en la segunda inflación. Utilizando la ecuación 4.13:

$$1.02 = \frac{(1.0925)(1.097)}{(1.0915)(1+\pi_2)}$$

Despejando la segunda inflación:

$$\pi_2 = \frac{(1.0925)(1.097)}{(1.0915)(1.02)} - 1 = 0.0765 = 7.65\%$$

La fórmula 4.13 se puede generalizar para cualquier número de periodos, quedando:

$$\frac{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_n)}{(1+\pi_1)(1+\pi_2)\ldots(1+\pi_n)} = 1 + r_p = (1+r)^n \qquad \textbf{4.14}$$

Donde:

i_1 : tasa nominal para el primer periodo

i_2 : tasa nominal para el segundo periodo

i_n : tasa nominal para el último periodo

π_1 : tasa de inflación para el primer periodo

π_2 : tasa de inflación para el segundo periodo

π_n : tasa de inflación para el último periodo

r_p : tasa real para todo el plazo (en este caso los n periodos)

r : tasa real equivalente por periodo

Ejemplo 4.51 Para los próximos 5 años se ofrece una tasa de interés del 21% anual. Si se espera ganar una tasa real anual del 3%, ¿cuál debería ser la inflación anual constante para los próximos 5 años?

Nótese que en este caso las tasas son iguales por lo que la ecuación 4.14 se puede expresar:

$$(1+r)^n = \frac{(1+i_1)(1+i_2)...(1+i_n)}{(1+\pi_1)(1+\pi_2)...(1+\pi_n)} = \frac{(1+i)^n}{(1+\pi)^n}$$

Sustituyendo valores:

$$(1.03)^5 = \frac{(1.21)^5}{(1+\pi)^5}$$

Despejando la inflación:

$$\pi = 17.48\%$$

Ejemplo 4.52 Un inversionista puede invertir $5,000,000. Él supone que las inflaciones los próximos años serán del 14%, 18% y 17% respectivamente. Si lo que desea es tener 20% más en términos reales por todo el plazo de los 3 años, ¿a qué tasa de interés constante anual debería invertir su dinero?

Nótese que la tasa deseada real es por todo el plazo, que la tasa de interés debe ser la misma por los 3 años y que la tasa de inflación varía año con año. Considerando lo anterior la fórmula 4.14 se representa así:

$$1+r_p=\frac{(1+i)^3}{(1+\pi_1)(1+\pi_2)(1+\pi_3)}$$

Sustituyendo valores para después despejar la tasa de interés:

$$1.20=\frac{(1+i)^3}{(1.14)(1.18)(1.17)}$$

Finalmente:

$$i=23.61\%$$

Vamos a comprobar este resultado. Si el inversionista gana una tasa del 23.61% anual tendría al cabo de 3 años:

$$M=5'000{,}000(1.2361)^3=9'443{,}304$$

El inversionista recibirá dentro de 3 años dicha cantidad, pero si la expresamos en pesos de hoy, tendría:

$$\frac{9'443{,}304}{(1.14)(1.18)(1{,}17)}=6'000{,}000$$

Esto quiere decir que si invierte \$5´000,000 recibirá dentro de 3 años \$6´000,000 en pesos de hoy, por lo que su ganancia real en los tres años es:

$$5'000{,}000(1+r)=6'000{,}000$$

Donde:

$$r=0.20=20\%$$

Que es precisamente la ganancia real que quería obtener el inversionista.

En ocasiones, no es fácil determinar el valor del dinero en el tiempo, sobre todo cuando existen altas tasas de inflación. Es recomendable que cuando se hable de cantidades de dinero que se recibirán en un futuro, éstas se manejen en términos reales, es decir, que se les quite el efecto de la inflación para cuantificar su poder adquisitivo.

El siguiente ejemplo pretende mostrar el efecto que tiene la inflación y el tiempo al determinar el valor real del dinero.

Ejemplo 4.53 Un seguro de vida promete pagar $1,000,000 dentro de 20 años en caso de que sobreviva una persona. Suponiendo que efectivamente se cobra el seguro, calcular el valor real del millón de pesos si se considera una inflación constante para los próximos 10 años de:

a) 5%
b) 20%
c) 40%

a) Se sabe que se recibirá un millón de pesos en 20 años, pero ¿realmente qué valor tendrá esa cantidad suponiendo las inflaciones anteriores? Lo que se debe hacer es deflactar o quitarle la inflación. Para el caso en que la inflación es del 5%:

$$\frac{1,000,000}{(1.05)^{20}} = 376,889.48$$

En este caso el valor real, con una inflación baja, disminuye cerca de dos terceras partes con respecto al valor nominal.

b) Con una inflación del 20%:

$$\frac{1,000,000}{(1.20)^{20}} = 26,084.05$$

El valor real disminuye sorprendentemente.

c) Con una inflación del 40%

$$\frac{1,000,000}{(1.40)^{20}} = 1,195.20$$

Realmente es increíble que el valor real se reduzca tanto.

El ejemplo 4.53 nos lleva a reflexionar que en economías con altas inflaciones, las promesas de dinero en el futuro cuando éste permanece constante en términos nominales, hay que tomarlas con muchas reservas. Las personas que contrataron seguros en la década de los 70´s se vieron sorprendidas porque las sumas aseguradas no se actualizaban, y las inflaciones que se experimentaron en la década de los 80´s, llegaron a rebasar el 100% en algunos años, como se puede apreciar en la tabla del caso de estudio este capítulo. Por eso, actualmente los seguros ajustan las sumas aseguradas año con año, para que se mantenga en términos reales el poder adquisitivo de la suma asegurada.

CASO DE ESTUDIO

Pérdida acumulada del poder adquisitivo de un trabajador de 1984 al 2009

En el capítulo 1 se elaboró una tabla con las inflaciones y los incrementos salariales anuales. Dicha tabla se reproduce a continuación.

Año (1)	Salario Mínimo (2)	Incremento salarial (3)	Inflación (4)	Ganancia real (5)
1984	0.68	55.88%	65.92%	-6.05%
1985	1.06	55.66%	66.38%	-6.44%
1986	1.65	84.85%	104.34%	-9.54%
1987	3.05	154.59%	176.83%	-8.03%
1988	7.77	11.27%	34.56%	-17.31%
1989	8.64	16.67%	22.48%	-4.75%
1990	10.08	18.06%	27.11%	-7.12%
1991	11.90	12.02%	17.95%	-5.03%
1992	13.33	7.05%	11.32%	-3.83%
1993	14.27	7.01%	7.50%	-0.46%
1994	15.27	7.01%	10.23%	-2.92%
1995	16.34	23.32%	51.72%	-18.72%
1996	20.15	31.27%	26.44%	3.82%
1997	26.45	14.18%	15.27%	-0.95%
1998	30.20	14.07%	19.02%	-4.16%
1999	34.45	10.01%	11.02%	-0.91%
2000	37.90	6.46%	8.11%	-1.52%
2001	40.35	4.46%	4.79%	-0.31%
2002	42.15	3.56%	5.16%	-1.52%
2003	43.65	3.64%	4.20%	-0.53%
2004	45.24	3.45%	4.54%	-1.04%
2005	46.80	4.00%	3.94%	0.05%
2006	48.67	3.90%	3.98%	-0.07%
2007	50.57	3.99%	3.70%	0.28%
2008	52.59	4.20%	6.28%	-1.95%
2009	54.80			

*Datos obtenidos de www.inegi.gob.mx

El objetivo en este momento es el de calcular la pérdida acumulada para un trabajador que ha ganado el salario mínimo del primero de enero de 1984 al primero de enero del 2009.

Como se mencionó en el capítulo 1, la pérdida anual para un trabajador en los 25 años estudiados ha sido considerable, ya que sólo en tres de ellos experimentó una ganancia. Para calcular la pérdida acumulada de los 25 años, se calculará el incremento acumulado que experimentó el salario mínimo, después se calculará la inflación acumulada para ese mismo periodo, para finalmente calcular la pérdida del periodo estudiado.

Para calcular el incremento salarial acumulado basta con multiplicar los factores de los incrementos salariales anuales, sumándoles uno como se hizo en la sección 4.10. Se tiene entonces:

$$\text{incremento salarial} = (1.5588)(1.5566)....(1.0399)(1.0420) - 1 = 79.5882$$

El primer factor corresponde al incremento salarial de 1984, el segundo al de 1985, y el último factor corresponde al incremento del 2008.

En principio, el resultado parece no sorprender porque se tiene un 79.5882, pero este valor está expresado en decimales. Regularmente este valor es menor que 1, por lo que no resulta extraño cambiar un 0.35 a un 35%, ó un 0.56 a un 56%. En este caso el resultado obtenido corresponde a un incremento salarial de 7,958.82%, esto es, el salario mínimo de 1984 al 2008 se ha vuelto 79 veces mayor!!!! Se ha incrementado de $0.68 a $54.80

Para el caso de la inflación procederemos análogamente al incremento salarial, lo que nos da la siguiente ecuación:

$$\text{inflación} = (1.6592)(1.6638)(2.0434)....(1.0370)(1.0628) - 1 = 228.8903$$

El primer factor corresponde a la inflación de 1984, el segundo a la de 1985, y el último a la inflación del 2008, lo que da como resultado un incremento de 22,889.03%, lo que se traduce en que un artículo cuyo precio ha aumentado conforme a la inflación, entonces de 1984 al 2008 su precio se ha vuelto 228 veces más grande.

Ya podemos darnos una idea de la pérdida de poder adquisitivo, ya que mientras los precios son 228 veces más grandes, los salarios sólo han crecido tal que ahora son 79 veces más grandes.

Para calcular la pérdida real acumulada recordemos la ecuación:

$$\frac{(1+i_1)(1+i_2)...(1+i_n)}{(1+\pi_1)(1+\pi_2)...(1+\pi_n)} = 1 + r_p$$

Considerando que en el numerador tenemos el crecimiento salarial y en el denominador el incremento acumulado de la inflación se tendría:

$$1+r_p=\frac{(1.5588)(1.5566)...(1.0420)}{(1.6592)(1.6638)...(1.0628)}=0.3477$$

Despejando la tasa real:

$$r_p=-0.6523$$

La pérdida de poder adquisitivo de 1984 al 2008 es del 65.23%. En palabras sencillas, si un trabajador podía comprar un kilo de carne con su salario en 1984, en el 2008 trabajando exactamente lo mismo, ahora le alcanzaría para comprar sólo 348 gramos de carne.

Ejercicios

4.2 Monto, valor acumulado o valor futuro.

1 Se invierten $18,000 con interés compuesto a una tasa del 27% anual. Encontrar los montos si los plazos son:
a) 3 años.
b) 10 años.
c) 4 meses.

2 ¿En qué caso, el interés compuesto ofrece un mayor monto que el interés simple; y en cuál otro el interés simple da un mayor monto que el interés compuesto?

3 En un banco se depositan $4,700 por 15 meses a una tasa del 1.5% mensual. Calcular:
a) el monto al final del plazo.
b) los intereses generados en el último mes.
c) los intereses generados en el mes 7.

4 Hace 5 años se depositaron $9,500 a una tasa del 45%. ¿Cuánto se retira el día de hoy:
a) con interés simple?
b) con interés compuesto?

5 Un banco te ofrece una tasa del 1.5% mensual. Si tienes $300,000 para invertir en un periodo de 18 días, ¿qué tipo de interés te convendría, simple o compuesto? Calcular los montos para verificar la respuesta.

6 Se decide depositar $2,800 a un plazo de 95 días a una tasa del 20% anual. Si se considera interés comercial, ¿cuánto se retirará al cabo del plazo?

4.3 Valor presente o capital

7 Calcular el valor presente de $7,000 a 2 años con interés compuesto, si el interés es del 1.7% mensual.

8 Una deuda contraída el 23 de octubre se liquidó el 30 de noviembre con un pago de $79,992. Si la tasa cobrada fue del 20% anual con interés compuesto, ¿de cuánto fue el préstamo?

9 Un pagaré con valor nominal de $6,000 se descuenta 2 meses antes de su vencimiento al 30% anual con interés compuesto. Calcular el valor descontado.

10 Se firma un pagaré a 3 meses por una deuda de $3,920 con un interés simple del 30% anual. Se decide descontar el pagaré faltando 1 mes con interés compuesto a una tasa del 32%. ¿En cuánto se descontó el pagaré?

4.4 La incógnita es el tiempo

11 El día de hoy se pagaron $68,742.8 por una deuda de $53,770. Si el interés cobrado fue del 27%, ¿hace cuánto tiempo se contrajo la deuda?

12 El 24 de mayo se firma un pagaré por una deuda de $4,100 y se sabe que el valor nominal del pagaré es de $4,246.37. Si la tasa de interés cobrada fue del 23%, ¿en qué fecha debió liquidarse?

13 ¿En cuánto tiempo se duplica un capital si se invierte a una tasa del 25% anual?

4.5 Tasas equivalentes

14 Encontrar la tasa semestral equivalente a una tasa anual del 28%.

15 ¿Cuál es la tasa trimestral equivalente a una tasa semestral del 14%?

16 Deseas invertir por 3 años un capital, y puedes elegir entre una tasa mensual del 1% y una tasa anual del 12%, ¿cuál preferirías? ¿Por qué? Confirma tu respuesta suponiendo que el capital es de $1,000.

17 Se desea conocer el valor presente de $5,000 a 3 años con una tasa del 25% anual. Calcular el mismo valor presente con una tasa equivalente trimestral.

18 Se tiene una tasa anual del 30% entonces, ¿la tasa equivalente semestral será menor o mayor al 15%? Explicar.

4.6 Tasas nominales.

19 Se depositan $6,700 a un plazo de 67 días y a una tasa del 24% convertible mensualmente. Calcular el monto.

20 ¿Qué tasa efectiva semestral corresponde a una tasa del 33% convertible trimestralmente?

21 Si se invierten $4,000 por 5 meses y se acumularán $4,450, calcular:
a) la tasa efectiva trimestral.
b) la tasa anual convertible mensualmente.
c) la tasa semestral convertible trimestralmente.

22 ¿Qué tasa anual convertible mensualmente equivale a una tasa del 30% convertible semestralmente?

23 Se tiene una tasa del 28% convertible mensualmente. ¿La tasa efectiva anual equivalente deberá ser mayor o menor al 28%? Explicar. Corrobora tu respuesta calculando la tasa efectiva anual.

24 Calcular la tasa semestral convertible mensualmente, a partir del 38% convertible semestralmente.

4.7 Ecuaciones de valor con interés compuesto.

25 Un préstamo de $15,300 debe liquidarse con 2 pagos iguales a los 45 y 90 días, cobrándose una tasa del 24% convertible mensualmente. Calcular el valor de los pagos.
a) Tomando fecha focal en 0.
b) Tomando fecha focal a los 45 días.
c) Tomando fecha focal a los 90 días.

26 Una bicicleta se puede comprar con un enganche del 25% y dos pagos de $970 cada uno, a los 2 y 3 meses. Si la tasa de interés cobrada es del 40% capitalizable semestralmente, encontrar el precio de la bicicleta.

27 Para pagar cierto artículo con valor de $5,000 se pactaron 3 pagos: un enganche del 30%, un segundo pago al mes, y un tercer pago de $1,700 a los 3 meses. ¿Cuál es el valor del segundo pago con un interés del 42%?

28 Un préstamo de $7,000 el 2 de marzo fue liquidado con dos pagos iguales de $3,600 a un interés del 20% anual. Si un pago se realizó el 2 de mayo, ¿en qué fecha se realizó el otro pago?

29 El 10 de mayo y el 15 de junio se efectuaron 2 compras por $6,000 y $4,200 respectivamente. Se decide liquidarlas con 2 pagos iguales el 15 de julio y el 15 de septiembre. Si la tasa cobrada es del 28% convertible mensualmente. ¿Cuál es el valor de cada pago?

30 El día de hoy se contraen 2 deudas de $4,000 y $9,000 para pagarse en 2 y 5 meses, a una tasa de interés simple del 30%. Al mes se pacta cambiar la forma de los pagos y se decide sustituirlos por dos pagos iguales a los 3 y 6 meses a partir de la fecha de reestructura, a una tasa de interés compuesto del 32% anual. ¿Qué valor tienen los pagos?

31 Una cocina integral debe ser pagada con un enganche del 40% y dos pagos de $3,200 cada uno, a los 30 y 50 días. Si el interés cobrado es del 36% convertible trimestralmente, ¿a cuánto ascendería el IVA pagado por la cocina, considerando la compra de contado?

32 Se depositarán en el banco hoy y dentro de un mes dos cantidades iguales, tales que a los 6 meses y un año, a partir de hoy, se puedan retirar $6,200 y $8,300 para pago de colegiatura. Si la tasa ofrecida es de un 15% semestral convertible mensualmente, ¿de cuánto deben ser los depósitos?

33 Una mueblería, por una recámara con valor de $7,200, pide que le paguen $8,600 al cabo de 3 meses. Si esa misma mueblería tiene una sala cuyo precio es de $5,600, y ofrece un plan de financiamiento con pagos iguales a 2 y 5 meses, ¿de cuánto deben ser los pagos, si dicha mueblería carga el mismo interés para todos sus planes de financiamiento?

4.8 Tasa instantánea o fuerza de interés

34 Se tiene una tasa instantánea del 21%. Si se quiere un tasa equivalente anual, ¿ésta debe ser mayor o menor al 21%? Explicar. Corrobore su respuesta calculando la tasa efectiva anual.

35 Calcular la tasa efectiva semestral correspondiente a una tasa instantánea del 25%.

36 ¿Qué tasa instantánea equivale a una tasa del 28% convertible mensualmente?

37 Se invierten $43,300 por 19 meses a una tasa instantánea del 23%. ¿Cuánto se acumula al finalizar el plazo?

38 ¿Qué cantidad debe depositarse el 29 de septiembre, para acumular al 15 de diciembre $3,500, a una tasa instantánea del 20%?

39 Un televisor con valor de $3,700 se pagará con un pago de $1,950 a los 35 días y otro a los 70 días. Si la fuerza de interés es del 30%, ¿cuál es el valor del segundo pago?

40 Vas a prestar $4,000 a 3 años y puedes escoger entre las siguientes 3 tasas: una tasa instantánea del 24%, una tasa del 12.5% semestral o bien una tasa anual del 24.8% capitalizable mensualmente. ¿Cuál te convendría más?

41 Se firman 2 pagarés el día de hoy por 2 deudas de $6,000 y $7,000 a 6 y 12 meses respectivamente. Originalmente se cobra un interés simple del 22% por ambos pagarés. A los 4 meses se decide intercambiar ambos pagarés por 2 pagos iguales a los 7 y 9 meses a partir de la reestructuración. Para hacer el intercambio se utiliza una tasa instantánea del 25%. Calcular el valor de los pagos.

42 Vas a pedir un préstamo y puedes escoger entre una tasa instantánea y una tasa anual convertible mensualmente. ¿Cuál preferirías que te cobraran si ambas son del 24%? Explicar.

4.9 Interés compuesto con tasas diferentes.

43 El año pasado se depositaron $5,700 en el sistema de ahorro voluntario que brindan las AFORES. Se sabe que las tasas que prevalecieron trimestre a trimestre fueron del 21%, 21.5%, 20.5% y 20%, todas convertibles trimestralmente. ¿Cuánto se tiene actualmente por la inversión?

44 Un plan de inversión ofrece pagar una tasa de interés anual del 30% los primeros 3 años y una tasa del 25% los siguientes 5 años. Si una persona invierte $10,000 el día de hoy, ¿cuánto acumulará al cabo de 7 años?

45 Calcular el valor presente de $8,000 a 12 meses si las tasas mensuales fueron del 2% durante 3 meses, 2.2% durante 5 meses y del 2.5% los 4 meses restantes.

46 Un préstamo de $12,000 fue liquidado en 3 años, donde las tasas de los dos primeros años fueron del 25% y 23% respectivamente. Si se pagó por el adeudo un total de $23,616, ¿cuál fue la tasa anual del tercer año?

47 Se depositaron $2,000 y se ofreció una tasa del 17% anual los primeros 2 años y de ahí en adelante una tasa anual del 19%. Si se retiraron $10,092.62, ¿cuánto tiempo estuvo invertido el dinero a la tasa del 19%?

4.10 Inflación

48 ¿Cuál será el precio de un automóvil dentro de 10 años, si actualmente tiene un valor de $230,000 y se supone una inflación del 15% anual para los primeros 5 años, y una inflación del 12% anual para los siguientes 5 años?

49 En los últimos 3 años la inflación ha sido del 35%, 27% y 14% para cada año. Cierta maquinaria hoy vale $3,000,000.
a) ¿Cuánto valía la maquinaria hace 3 años?
b) ¿Cuál fue la inflación promedio anual para los 3 años?
c) ¿Cuál fue la inflación anual equivalente para los 3 años?

50 Se desea hacer una proyección de los precios de ciertos artículos dentro de 8 años. Se suponen originalmente inflaciones del 20% anual los primeros 2 años, del 17% anual los siguientes 5 años y una inflación del 30% para el último año. Si se deseara aplicar una inflación constante anual, ¿cuál debería ser la inflación propuesta que ofreciera la misma proyección?

51 ¿Qué tasa real le corresponde a una tasa de interés del 25%, si la inflación es del 28%?

52 Un banco ofrece una tasa del 24% convertible mensualmente. Si la inflación esperada es del 20%, ¿cuál es la tasa real que obtendría un inversionista al invertir su dinero por un año?

53 Se le prestan $5,000 a un buen amigo por lo que no se le cobrarán intereses. 7 meses después es devuelto el préstamo y en el transcurso del plazo, la inflación fue del 8%. ¿Cuál fue la pérdida real que experimentó la persona que prestó el dinero?

54 Un amigo te ofrece invertir en un negocio por 5 años. Supones que las inflaciones serán del 15% anual los primeros 2 años y del 18% anual los siguientes 3 años. Si deseas ganar un 10% real anual, ¿qué rendimiento anual esperarías ganar?

55 La inflación del último año fue del 30%. Una persona al invertir dinero ganó un 5% real durante ese mismo año, si la tasa que obtuvo el primer

semestre fue del 32% convertible mensualmente, ¿qué tasa convertible mensualmente debió ganar durante el segundo semestre?

Problemas tipo examen

1 Una inversión de $7,500 hecha el 1 de octubre produjo un total de $288.315 por concepto de intereses. Si la tasa ganada fue del 32% convertible mensualmente, ¿en qué fecha se efectuó el retiro?

2 En los últimos 3 años las inflaciones anuales han sido del 34%, 23% y 17%. Si un persona invirtió su dinero de forma semestral durante estos 3 años a tasas del 26.1%, 24.5%, 19.2%, 18.3%, 15.7% y 15.5%, todas convertibles semestralmente, ¿cuál fue la pérdida o ganancia real que experimentó en los 3 años el dinero de esta persona?

3 Inviertes $5,000 y al cabo de 75 días retiras $5,070 con todo e intereses. Calcular:

a) la tasa instantánea de interés.

b) la tasa anual capitalizable bimestralmente.

4 Por una sala con costo de $8,200 se pacta realizar un enganche del 20% y dos pagos iguales a los 3 y 6 meses cobrándose una tasa de interés compuesto del 27% anual. Se establece además que en caso de retraso en los pagos se aplicará una tasa de interés compuesto del 39% anual. Si los pagos se efectuaron a los 4 meses el primero, y el segundo a los 8 meses y el enganche se realizó conforme a lo pactado, ¿de cuánto fueron los pagos realizados?

5 De acuerdo a la tabla que se presenta en el caso de estudio de este capítulo, ¿cuál fue la pérdida o ganancia real acumulada del salario de un trabajador para el periodo del 2000 al 2003? Nótese que son 4 años.

APÉNDICE

El objetivo de este apéndice es demostrar la relación 4.4:

$$1+i_a = e^{\delta}$$

donde la fuerza de interés δ es una tasa anual convertible cada instante. Si se tuviera una tasa anual convertible cada mes $i^{(12)}$ se requiere dividir esta tasa entre 12 para tener la tasa efectiva mensual, y si se quisiera encontrar la tasa efectiva anual basta con sumarle 1 a la tasa mensual y elevarla a la potencia 12, es decir:

$$1+i_a = \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}$$

En el caso en que se tuviera una tasa anual convertible semestralmente se tiene que dividir entre 2 para posteriormente sumarle 1 y elevarlo al cuadrado, en particular:

$$1+i_a = \left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{2}$$

De forma general si se tiene una tasa nominal que se convierte m veces al año, la equivalencia con una tasa efectiva anual sería:

$$1+i_a = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}$$

Si la relación 4.4 es cierta entonces:

$$e^{\delta} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} \qquad \textbf{4.4.1}$$

Como δ es una tasa anual convertible cada instante e $i^{(m)}$ es una tasa convertible cada m periodos entonces por definición:

$$\delta = \lim_{m \to \infty} i^{(m)} \qquad \textbf{4.4.2}$$

ya para que se dé la igualdad entonces $i^{(m)}$ debe capitalizarse un infinito número de veces en un año.

Hasta el momento se ha supuesto cierta la ecuación 4.4.1, ahora si partiendo de dicha ecuación se obtiene la ecuación 4.4.2 que es una definición la demostración queda completada.

Despejando $i^{(m)}$ de la ecuación 4.4.1 queda:

$$i^{(m)} = m\left(e^{\frac{\delta}{m}} - 1\right) \qquad \textbf{4.4.3}$$

Sabiendo que e^{x} es el valor de la siguiente serie:

$$e^{x} = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^{2}}{2!} + \frac{X^{3}}{3!} + \frac{X^{4}}{4!} + ...$$

Se puede desarrollar $e^{\frac{\delta}{m}}$ quedando:

$$e^{\frac{\delta}{m}} = 1 + \frac{\delta}{m} + \frac{\delta^{2}}{2\,m^{2}} + \frac{\delta^{3}}{6\,m^{3}} + ...$$

Sustituyendo en la ecuación 4.4.3 se tendría:

$$i^{(m)} = m\left(\left(1 + \frac{\delta}{m} + \frac{\delta^{2}}{2\,m^{2}} + \frac{\delta^{3}}{6\,m^{3}} + ...\right) - 1\right)$$

Simplificando:

$$i^{(m)} = \delta + \frac{\delta^{2}}{2\,m} + \frac{\delta^{3}}{6\,m^{2}} + ...$$

Calculando el límite en ambos lados de la ecuación cuando m tiende al infinito se tiene:

$$\lim_{m \to \infty} i^{(m)} = \delta$$

que era lo que se quería demostrar y por ende la relación 4.4 es verdadera.

CAPÍTULO **5**

ANUALIDADES

5.1 Introducción.

El tema de anualidades es un caso particular de las ecuaciones de valor con interés compuesto. Las anualidades son una serie de pagos iguales donde éstos pueden ser desde uno, hasta un infinito número de ellos. En un principio parecería que éste es un tema más complejo, pero en realidad una vez entendidos los conceptos manejados en capítulos anteriores, y los supuestos que se tratan a continuación, te darás cuenta que es un material sencillo de comprender. Se deja un capítulo especialmente para tratar anualidades dada su importancia en la práctica. Casos típicos de una anualidad son los pagos mensuales fijos que se tienen que realizar para pagar un auto o una casa.

5.2 Supuestos.

Aún cuando la mayoría de los autores manejan diferentes tipos de anualidades y para cada una de éstas se tiene una fórmula particular, este texto centrará su análisis en una sola fórmula y veremos que con ésta se puede resolver cualquier tipo de anualidad, realizando las modificaciones pertinentes. Para ello es necesario que estén bien claros los supuestos que a continuación se mencionan:

1 Una anualidad es una serie de n pagos donde todos los pagos deben ser iguales.

2 Todos los pagos son equidistantes, es decir, que todos los pagos se efectúan con la misma periodicidad, ya sea mensuales, anuales, etc.

3 La tasa de interés que se cobra durante toda la anualidad es la misma y es constante.

4 Las tasas de interés manejadas serán siempre efectivas. Si la tasa viene expresada en términos nominales primero hay que convertirla.

5 Debe existir una correspondencia entre la forma de los pagos y la tasa de interés. Esto es, si los pagos son mensuales la tasa de interés debe ser mensual, si los pagos son anuales la tasa debe ser anual, etc.

6 **El valor presente de una anualidad siempre evalúa un periodo antes del primer pago**. Si los pagos se realizan mensualmente y el primer pago se efectúa el quinto mes entonces la anualidad está valuada en el cuarto mes, si los pagos se realizan de forma anual y el primer pago se efectúa dentro de un año, entonces la anualidad se evalúa hoy.

Quizá el supuesto 6 sea el menos comprensible en este momento. Se ha dejado en negrillas para resaltarlo y conforme se avance en la exposición este supuesto quedará claro y será la base para utilizar una sola fórmula.

5.3 Valor presente de una anualidad.

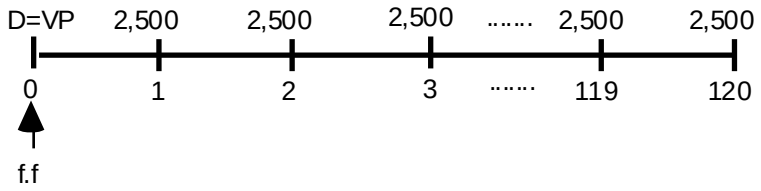
Como se mencionó en la introducción, una anualidad es un caso particular de las ecuaciones de valor donde se tienen n pagos iguales. Recordemos que para las ecuaciones de valor teníamos una fecha focal donde había que llevar todas las cantidades. En una anualidad se pueden tener series de 120 pagos o más. En principio parecería una tarea interminable tener que llevar las 120 cantidades a la fecha focal, pero veremos que con un artificio matemático este hecho se simplifica enormemente.

Antes de obtener la fórmula de valor presente, se expondrá a través de un ejemplo la mecánica. Posteriormente se generalizará este caso particular para encontrar la fórmula general.

Ejemplo 5.1 Una persona se comprometió a pagar $2,500 mensuales por 10 años para pagar el préstamo de su casa, realizando el primer pago dentro de un mes. Si la tasa de interés que le están cobrando es del 1% mensual, ¿cuánto fue lo que le prestaron el día de hoy?

Véase como todos los supuestos de anualidades se cumplen: son 120 pagos mensuales iguales, la tasa de interés es efectiva y mensual en correspondencia con los pagos, además de ser constante; y finalmente, el valor de todos los pagos se calculará un mes antes del primer pago. La figura 5.1 muestra la serie de pagos y la fecha focal.

FIG. 5.1



La "D" en la figura 5.1 representa la deuda que se tiene, que en este caso es igual al valor presente (VP) de todos los pagos. No siempre el valor presente y la

deuda van a coincidir. El valor presente de una anualidad consiste en traer pago por pago a valor presente todos y cada uno de los pagos. Lo importante es que ese valor presente siempre estará evaluado un periodo antes de efectuar el primer pago.

Para calcular el valor presente de los pagos es necesario llevar a la fecha focal todos y cada uno de los pagos (¡los 120 pagos!) Véase que la fecha focal se escoge un periodo antes del primer pago. Vamos a plantear la ecuación de valor, donde lo que se debe es igual a lo que se paga:

$$\mathrm{VP} = \frac{2,500}{(1+\mathrm{i})} + \frac{2,500}{(1+\mathrm{i})^2} + ... + \frac{2,500}{(1+\mathrm{i})^{119}} + \frac{2,500}{(1+\mathrm{i})^{120}} \qquad \textbf{1}$$

Donde la tasa de interés es del 1%. Esta ecuación es la número 1. Para simplificar la ecuación uno se multiplicará en ambos lados por el factor (1+i), dándonos la ecuación 2.

$$\mathrm{VP}(1+\mathrm{i}) = 2,500 + \frac{2,500}{(1+\mathrm{i})} + ... + \frac{2,500}{(1+\mathrm{i})^{118}} + \frac{2,500}{(1+\mathrm{i})^{119}} \qquad \textbf{2}$$

Al multiplicar por (1+i) el lado derecho de la ecuación 1 se le va disminuyendo un grado al denominador. Ahora hay que restar de la ecuación 2, la ecuación 1. Nótese que hay muchos términos iguales del lado derecho de ambas ecuaciones, de hecho, se van a eliminar casi todos los términos, menos el 2,500 de la ecuación 2 y el $2,500/(1+i)^{120}$ de la primera ecuación. Restando entonces ambas ecuaciones queda:

$$\mathrm{VP}(1+\mathrm{i}) - \mathrm{VP} = 2,500 - \frac{2,500}{(1+\mathrm{i})^{120}} \qquad \textbf{2-1}$$

Simplificando el lado izquierdo:

$$(VP)i = 2,500 - \frac{2,500}{(1+i)^{120}}$$

Despejando el valor presente y factorizando los $2,500:

$$\mathrm{VP} = 2,500\left[\frac{1-\frac{1}{(1+\mathrm{i})^{120}}}{\mathrm{i}}\right] = 2,500\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-120}}{\mathrm{i}}\right]$$

Sustituyendo la tasa de interés del 1% se tiene:

$$VP = 2,500\left[\frac{1-(1.01)^{-120}}{0.01}\right] = (2,500)(69.70) = 174,251.31$$

El valor presente de la anualidad en este caso es igual a la deuda, ya que ambos están un periodo antes del primer pago. Por lo tanto el préstamo fue de $174,251.31

Hay que notar que la expresión encontrada facilitó enormemente el cálculo del préstamo. Se dice entonces que $174,251.31 de hoy son equivalentes a 120 pagos mensuales de $2,500 cobrándose una tasa de interés del 1% mensual, donde el primer pago se efectúa al mes.

Generalizando ahora la expresión encontrada se tiene que:

$$VP = X\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = X\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad \textbf{5.1}$$

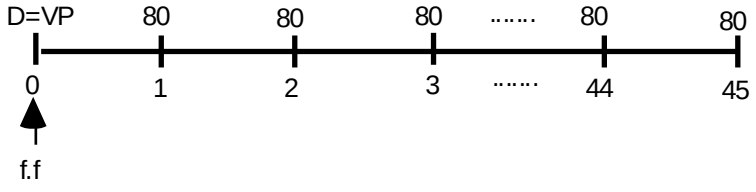
Donde:

VP	:	valor presente de toda la serie de pagos evaluada un periodo antes del primer pago.
X	:	valor de cada uno de los pagos.
i	:	tasa efectiva de interés por periodo de pago.
n	:	número de pagos que se evalúan a valor presente.

En el caso en que no se especifique cuando se realiza el primer pago, por convención se asume que el primer pago se efectúa al finalizar el primer periodo.

Ejemplo 5.2 Un televisor será liquidado con 45 pagos semanales de $80 cobrándose una tasa del 1% semanal. ¿Cuál debe ser el precio de la televisión si el primer pago se tiene que hacer a la semana de la compra?

Los pagos son de $80, la tasa es semanal del 1% y se tienen 45 pagos. Como se muestra en la gráfica, el valor presente evalúa un periodo antes de que se realice el primer pago.



Aplicando la fórmula y sustituyendo los valores:

$$VP = X\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 80\frac{1-(1.01)^{-45}}{0.01}$$

$$= (80)(36.09) = 2,887.56$$

Nuevamente la deuda se encuentra un periodo antes del primer pago, por lo que el valor del televisor sería de $2,887.56

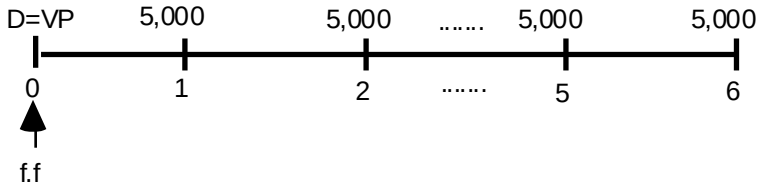
Hay que tener presente que la tasa de interés debe ser efectiva por periodo de pago. En caso de que la tasa no corresponda con los pagos, la tasa debe ser convertida a la periodicidad de los mismos.

Ejemplo 5.3 Encontrar el valor presente de 6 pagos mensuales de $5,000, si la tasa cobrada es del 34% convertible mensualmente.

Como no se especifica cuando se efectúa el primer pago se asume por convención que éste se da al finalizar el primer mes. Los pagos son mensuales por lo que se debe tener una tasa efectiva mensual. Como la tasa es nominal sólo hay que convertirla quedando:

$$i_m = \frac{i^{(12)}}{12} = \frac{0.34}{12} = 0.0283$$

El diagrama de tiempo vendría dado por:



Utilizando la fórmula de valor presente para una anualidad se tiene:

$$VP = X\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 5,000\frac{1-(1.0283)^{-6}}{0.0283}$$

Donde:

$$VP = (5,000)(5.447) = 27,236.22$$

Los $27,236.22 pagados el día de hoy equivalen a 6 pagos mensuales de $5,000 considerando una tasa del 34% convertible mensualmente.

Ejemplo 5.4 Calcular el valor de un préstamo que será pagado en 4 años con pagos semestrales de $7,300, a una tasa del 35% anual.

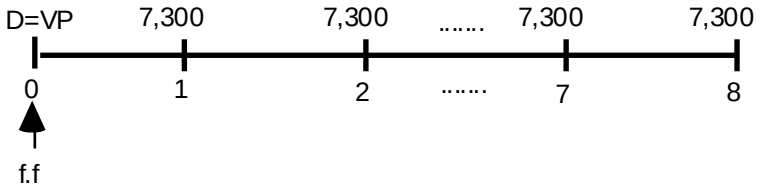
Se tiene en este caso que n=8 (los pagos son semestrales), X=7,300 y sólo resta convertir la tasa anual a una tasa efectiva semestral.

$$(1+i_s)^2 = (1+i_a)$$

De aquí que:

$$i_s = (1.35)^{1/2} - 1 = 0.1619$$

Una vez teniendo ya la tasa efectiva semestral, y apoyándonos en el siguiente diagrama, podemos plantear la ecuación de valor presente.



Sustituyendo los valores correspondientes:

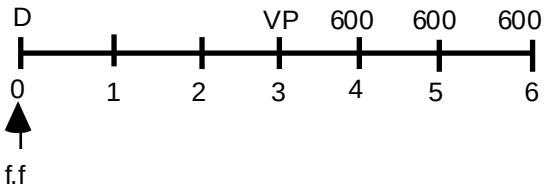
$$VP = 7,300\frac{1-(1.1619)^{-8}}{0.1619} = (7,300)(1.317) = 31,515.50$$

Hasta el momento tanto el valor presente como la deuda han coincidido en que ambos están ubicados en la misma fecha. El siguiente ejemplo muestra lo que debe hacerse en caso de que esto no ocurra.

Ejemplo 5.5 Una deuda ha de ser pagada mensualmente con 3 pagos nivelados o fijos de $600 a una tasa del 3% mensual, pero el primer pago se realiza a los 4 meses. Calcular el valor de la deuda.

En este caso hay que tener cuidado con lo que respecta al supuesto de que el valor presente se calcula un periodo antes del primer pago. Véase la figura 5.2.

FIG 5.2



Antes de resolver el problema analicemos algunas cosas interesantes de la figura 5.2. La deuda ya no coincide con el valor presente, puesto que la deuda se supone al día de hoy, y el valor presente de los pagos se evalúa un periodo antes del primer pago, por lo que el valor presente está ubicado en el mes 3.

Se pudiera pensar que como son 3 pagos y el primero se hace en el mes 4, entonces el último se realiza en el mes 7. Esto no es cierto debido a que el pago en el mes 4 debe ser contabilizado, haciéndose el último pago en el mes 6.

Una regla práctica para determinar cuando se efectúa el último pago es sumarle el número de pagos al momento donde se realiza el primero y finalmente restarle uno. Para este caso se tendría 4+3-1=6, resultando que el último pago se hace en el sexto mes. Si se tienen, por ejemplo, 24 pagos donde el primero se realiza en el periodo 7, entonces el último pago se efectúa en el periodo 30 (7+24-1=30).

Otro aspecto importante es la fecha focal. En este caso se optó por colocar la fecha focal en cero (hoy), por lo que el valor presente debe ser llevado de 3 a cero con el factor de descuento $(1+i)^{-3}$ (véase la figura 5.2), quedando:

$$D = \frac{VP}{(1+i)^3} = VP(1+i)^{-3}$$

Debe quedar claro en este momento que el valor presente es ya una cantidad; es cierto que representa una serie de pagos, pero una vez calculada puede ser acumulada o traída a valor presente con el simple factor de interés compuesto. Sustituyendo la fórmula de valor presente se tiene:

$$D = \left[600 \frac{1-(1.03)^{-3}}{0.03} \right] (1.03)^{-3}$$

Realizando operaciones:

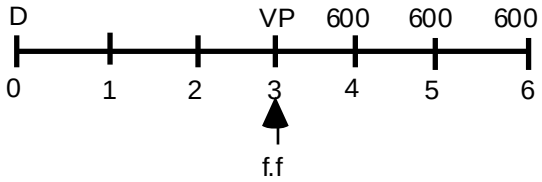
$$D = [1,697.17](1.03)^{-3} = 1,553.15$$

Los $1,697.17 es el valor de los 3 pagos de $600 evaluados en el mes 3, que por definición es donde evalúa el valor presente la fórmula, como se aprecia en la figura 5.2. El segundo factor lo que hace es llevar esta cantidad que está en el mes 3 al día de hoy, que es donde está la fecha focal, por lo que el valor de la deuda el día de hoy es de $1,553.15.

Ejemplo 5.6 Resolver el ejemplo 5.5 pero ahora la fecha focal hay que ubicarla en el mes 3.

Lo que trata de demostrar este ejemplo es que no importa donde se coloque la fecha focal, el resultado no cambia porque se está utilizando interés compuesto. La figura 5.3 representa los pagos con la fecha focal en el mes 3.

FIG. 5.3



En este caso la anualidad estaría evaluada exactamente donde está la fecha focal, por lo que al valor presente ya no hay que acumularlo ni traerlo en el tiempo. La deuda por estar en cero hay que acumularla 3 periodos:

$$D(1+i)^3 = VP$$

Sustituyendo la fórmula de valor presente se tiene:

$$D(1.03)^3 = 600\frac{1-(1.03)^{-3}}{0.03} = 1,697.16$$

Donde:

$$D = 1,553.15$$

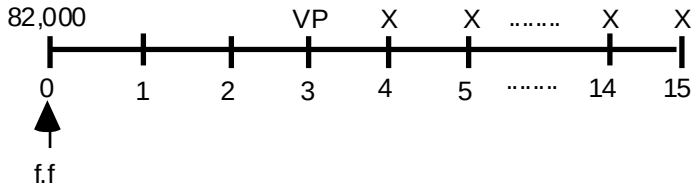
Los $1,697.16 es el dinero que debería prestarse en el mes 3 para recibir los 3 pagos de $600. Como el préstamo se efectúa en cero, éste genera intereses por 3 periodos $D(1.03)^3$, por lo que finalmente se prestan $1,553.15

Ejemplo 5.7 El día de hoy se otorga un préstamo por $82,000, mismo que será pagado de forma trimestral durante 3 años, donde el primer pago se realizará al año. Si la tasa cobrada es del 30% convertible trimestralmente, ¿cuál es el valor de cada uno de los pagos?

Es conveniente manejar los periodos de forma trimestral puesto que los pagos se hacen de esta manera, por lo que el primer pago se realiza en el cuarto trimestre (un año). Como los pagos se realizan por 3 años, entonces se han de efectuar un total de 12 pagos. La tasa es nominal convertible trimestralmente, así que la tasa efectiva trimestral es:

$$i_t = \frac{i^{(4)}}{4} = \frac{0.30}{4} = 0.075$$

Un diagrama de este problema considerando la fecha focal el día de hoy sería:



Nótese que el último pago se realiza en el trimestre 15 y no en el 16 porque hay que contabilizar el pago en 4. Según la regla propuesta 4+12-1=15.

El valor presente de todos los pagos se evalúa en el trimestre 3 (un trimestre antes del primer pago), y sólo resta llevar este valor presente a cero, para colocar todo en la misma fecha focal. A los $82,000 no se les afecta porque ya están en la fecha focal.

$$82,000 = \left[X \frac{1-(1.075)^{-12}}{0.075} \right] \left[(1.075)^{-3} \right]$$

Para despejar la X se recomienda realizar las operaciones en los paréntesis primero:

$$82,000 = X\left[7.7353\right](0.805) = X\left[6.2266\right]$$

Finalmente:

$$X = 13,169.32$$

Es importante aclarar que el valor presente de una anualidad evalúa un periodo antes del primer pago, considerando como periodo la distancia que hay entre los pagos. Si los pagos son trimestrales entonces el valor presente evalúa un trimestre antes del primer pago, si los pagos son anuales el primer pago se evalúa un año antes del primer pago, etc.

Supóngase que se tienen pagos trimestrales donde el primer pago se efectúa a los 7 meses, de acuerdo a lo que se ha manejado, el valor presente de esa anualidad estaría evaluada un trimestre antes del primer pago, que en este caso sería en el mes 4. Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.8 Por un comedor se realizarán 4 pagos semestrales de $4,300 cobrándose una tasa de interés del 40% anual. Si el primer pago se realiza a los 8 meses, ¿cuál es el costo del comedor?

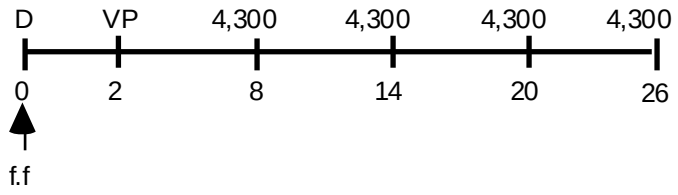
Como los pagos son semestrales y la tasa es anual es necesario convertir la tasa:

$$(1+i_s)^2 = (1+i_a)$$

de aquí que:

$$i_s = (1.40)^{1/2} - 1 = 0.1832$$

Teniendo la tasa efectiva semestral veremos el diagrama correspondiente con fecha focal hoy y el tiempo manejado en meses:



El diagrama muestra los 4 pagos que han de realizarse en los meses: 8, 14, 20 y 26. Aunque los pagos son semestrales se escogió considerar en meses el tiempo para facilitar el planteamiento de la ecuación.

Como los pagos son semestrales, el valor presente de la anualidad está evaluado 6 meses antes del primer pago, que como se indica en el diagrama, el valor presente está evaluado en el mes 2. Este valor presente debe ser llevado a la fecha focal, por lo que hay que regresarlo 2 meses, y como se tiene una tasa semestral entonces hay que regresarlo $2/6$.

El planteamiento podría ser:

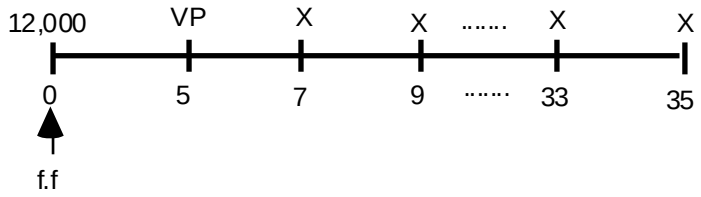
$$D = \left[(4,300)\left(\frac{1-(1.1832)^{-4}}{0.1832} \right) \right] \left[(1.1832)^{-2/6} \right]$$

Resolviendo:

$$D = (4,300)(2.6733)(0.9455) = 10,868.4$$

Ejemplo 5.9 Cierta empresa solicita un préstamo de $12,000,000 para pagarse de forma bimestral a 5 años. El préstamo es concedido con un periodo de gracia de 7 meses (el primer pago se realiza a los 7 meses) y cobrándose una tasa del 28% convertible mensualmente. Calcular el valor de los pagos que saldarán la deuda.

El diagrama, considerando el tiempo en meses, quedaría de la siguiente manera: (A la cantidad solicitada se le quitaron 3 ceros para su representación en el diagrama).



Como los pagos son bimestrales en 5 años se realizan un total de 30 pagos (60 meses). Por ser los pagos bimestrales, el valor presente se evalúa un bimestre antes del primero, por lo que la anualidad estaría evaluada en el mes 5.

En este caso, por ser los pagos bimestrales, debemos tener una tasa efectiva bimestral. Para este ejemplo tenemos una tasa convertible mensualmente, por lo que primero podemos obtener una tasa efectiva mensual:

$$i_m = \frac{i^{(12)}}{12} = \frac{0.28}{12} = 0.02333$$

Sabemos que la relación de equivalencia entre una tasa mensual y una tasa bimestral debe cumplir:

$$(1+i_m)^2 = (1+i_b)$$

Sustituyendo valores y despejando la tasa bimestral se tiene:

$$i_b = (1.02333)^2 - 1 = 0.04721$$

Teniendo ya la tasa efectiva bimestral y sabiendo que n=30 se procede a plantear el problema, sin olvidarse que la fecha focal está en cero.

$$12,000 = X\left(\frac{1-(1.04721)^{-30}}{0.04721}\right)\left[(1.04721)^{-5/2}\right]$$

Como la tasa está bimestral y hay que llevar el valor presente de la anualidad del mes 5 a cero, el tiempo transcurrido en bimestres es de $5/2$. Resolviendo:

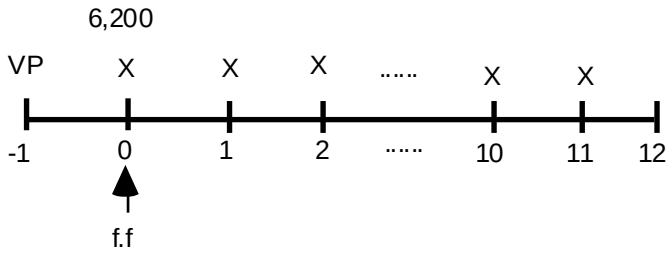
$$12,000 = X(15.873)[0.891]$$

Donde:

$$X = 848,388.17$$

Ejemplo 5.10 Una recámara cuyo valor es de $6,200 ha sido comprada para liquidarse en 12 pagos mensuales, donde el primer pago se realiza el día de hoy. La tasa cobrada es del 35% anual. Encontrar el valor de los pagos.

El diagrama para este ejemplo sería:



El análisis de este diagrama se torna interesante por 2 razones principalmente: la primera es que **como el primer pago se realiza el día de hoy y la anualidad evalúa un periodo antes, entonces el valor presente de la anualidad está evaluada en menos uno**. La segunda es que son 12 pagos, pero como el primero se realiza en cero, el último se debe hacer en 11.

Antes de realizar el planteamiento vamos a calcular la tasa efectiva mensual:

$$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$$

Resolviendo para la tasa mensual:

$$i_m = (1.35)^{1/12} - 1 = 0.0253$$

Sabiendo que el valor presente de la anualidad está evaluado en -1 y que la fecha focal está en cero, sólo resta acumular un periodo el valor presente, esto es:

$$6,200 = VP\,(1+i)$$

Sustituyendo valores:

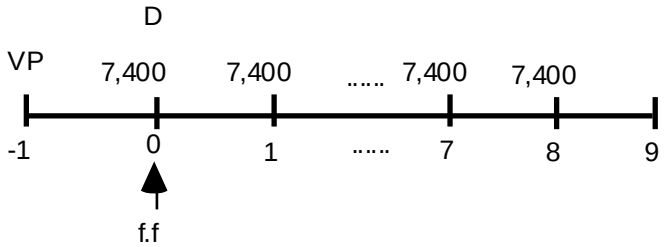
$$6,200 = X\left(\frac{1-(1.0253)^{-12}}{0.0253}\right)(1.0253)$$

Despejando X se tiene:

$$X = 590.65$$

Ejemplo 5.11 Encontrar el valor presente de 9 pagos semestrales de $7,400 si el primer pago se realiza el día de hoy y la tasa es del 40% convertible mensualmente.

El diagrama de tiempo es:



Como los pagos son semestrales, el valor presente se evalúa un semestre antes del primer pago, en este caso seis meses antes, por lo que hay que acumularlo un semestre, para evaluarlo en la fecha focal. A pesar de que son 9 pagos, se termina en el octavo semestre, ya que se comienza en cero. Como siempre, primero vamos a convertir la tasa para tener una efectiva semestral:

$$i_m = \frac{i^{(12)}}{12} = \frac{0.40}{12} = 0.0333$$

Por tanto, la tasa efectiva semestral es:

$$i_s = (1.0333)^6 - 1 = 0.2174$$

Planteando el problema, el valor presente debe ser acumulado un periodo para colocarlo en la fecha focal:

$$D = VP\,(1+i)$$

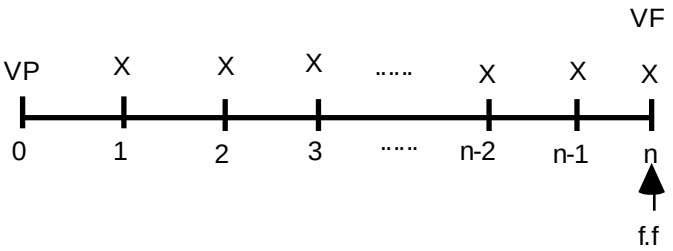
Sustituyendo valores:

$$D = 7,400\left(\frac{1-(1.2174)^{-9}}{0.2174}\right)(1.2174) = 34,381.46$$

5.4 Valor futuro de una anualidad.

Nos hemos concentrado hasta el momento en calcular el valor presente de una serie de pagos, pero en la práctica es común calcular el valor futuro de una serie de depósitos, como en el caso de las pensiones, en donde los trabajadores y/ó sus patrones depositan de forma obligatoria una cantidad, para que al final de su vida laboral puedan retirarse gozando de un pago que comúnmente será mensual. Para calcular el valor futuro de una anualidad primero veremos el caso más simple donde el valor futuro se calcula al momento de realizar el último depósito. Véase la figura 5.4.

FIG. 5.4



En la figura 5.4 las X representan los depósitos que han de realizarse y n es el número de depósitos en total. Como se dijo anteriormente el valor futuro se calcula al momento de realizar el último depósito, que en este caso es en "n", por eso es que tanto el valor futuro (VF) y la fecha focal se localizan en este punto.

El valor presente como ya sabemos se calcula en este caso en cero (un periodo antes del primer pago o depósito). Para calcular el valor futuro solo basta acumular "n" periodos el valor presente, esto es:

$$VF = VP\,(1+i)^{n}$$

Sustituyendo la fórmula de valor presente quedaría:

$$VF = X\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{n}$$

Finalmente multiplicamos el factor $(1+i)^n$ por los dos términos que están dentro del corchete quedando:

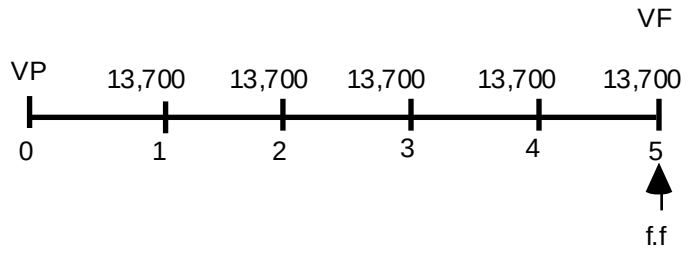
$$VF = X\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] \qquad \textbf{5.2}$$

Donde:

VF	:	Valor futuro de toda la serie de depósitos evaluada al momento de realizar el último de ellos.
X	:	Valor de cada uno de los depósitos.
i	:	tasa efectiva de interés por periodo de pago.
n	:	número de depósitos que se evalúan a valor futuro.

La fórmula 5.2 evalúa una serie de "n" depósitos periódicos, al momento de realizar el último de ellos.

Ejemplo 5.12 ¿Cuánto acumularán al final de cinco años, 5 depósitos anuales de $13,700 si se obtiene una tasa del 20% anual? (El primer depósito se realiza al finalizar el primer año).



El valor futuro se desea calcular al final de los cinco años, así que ahí se coloca la fecha focal. Para calcular el valor futuro por esta ocasión lo haremos a través tanto del valor presente, como del valor futuro.

a) Utilizando el valor presente:

$$VP = 13,700\left[\frac{1-(1.2)^{-5}-1}{0.2}\right] = 40,971.39$$

Esto sería lo que valdrían los depósitos el día de hoy, como se quiere su valor en 5 años se tiene que acumular esta cantidad 5 periodos a una tasa del 20%.

$$VF = 40,971.39(1.2)^5 = 101,949.92$$

b) Utilizando directamente la fórmula de valor futuro:

$$VF = X\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] = 13,700\left[\frac{(1.2)^5-1}{0.2}\right] = 101,949.92$$

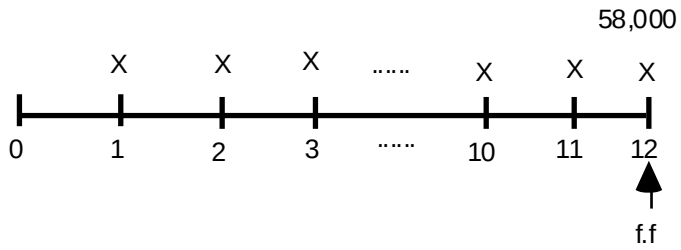
En el ejemplo 5.12 podemos apreciar que nuestra fórmula de valor presente puede servir para calcular el valor futuro, pero por facilidad se utilizará de aquí en adelante la fórmula de valor futuro directamente. Nótese además que al realizar 5 depósitos de $13,700 se hace un depósito total de ($13,700)(5)=$68,500, lo que se traduce en una ganancia de $33,449.92 por concepto de intereses durante todo el periodo. Esta ganancia tan alta, se debe a que los primeros $13,700 depositados generan intereses durante 4 años, los segundos $13,700 generan intereses durante 3 años y así sucesivamente, cada depósito va generando sus propios intereses, de acuerdo al momento en que haya sido efectuado.

Ejemplo 5.13 Se desean acumular $58,000 para un viaje de placer que se planea para un año, realizando depósitos mensuales. Si se comienza el siguiente mes y la tasa ofrecida es del 18% anual, ¿cuánto debe depositarse mensualmente para acumular dicha cantidad?

Como en el valor presente, la tasa debe ser efectiva por periodo de pago. Convirtiendo la tasa anual a una tasa mensual:

$$i_m = (1.18)^{1/12} - 1 = 0.0139$$

El diagrama de tiempo vendría dado por:



Utilizando la fórmula de valor futuro:

$$58,000 = X\left[\frac{(1.0139)^{12} - 1}{0.0139}\right] = X\,(12.96)$$

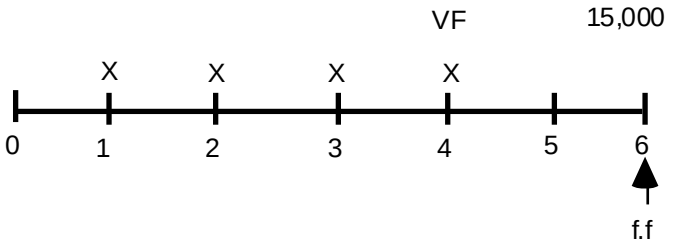
Despejando el depósito:

$$X = 4,475.16$$

Si en el ejemplo anterior los depósitos no hubieran generado intereses (como en una tanda) se hubieran tenido que depositar $4,833.33 (58,000/12=4,833.33) para lograr acumular la cantidad deseada. La diferencia radica en que en una anualidad los depósitos generan intereses, por lo que se tiene que depositar menos para lograr acumular lo mismo.

Ejemplo 5.14 Un padre de familia para poder pagar la colegiatura de su hijo el año próximo, que se sabe tendrá un costo de $15,000, realizará 4 depósitos bimestrales comenzando el próximo bimestre, y una vez que haya hecho el último dejará su dinero en el banco 4 meses para que le siga redituando intereses. ¿Cuánto debe depositar, si le ofrecen una tasa del 24% convertible bimestralmente?

El diagrama quedaría así, manejando el tiempo en bimestres:



Ahora el valor futuro de la anualidad no está en la fecha focal, ya que se terminan de hacer los depósitos antes de la fecha considerada, y el valor futuro evalúa al momento de realizar el último depósito. Para resolver el problema hay que acumular 2 periodos el valor futuro de la anualidad.

Convirtiendo a una tasa efectiva bimestral:

$$i_b = \frac{i^{(6)}}{6} = \frac{0.24}{6} = 0.04$$

Como el valor futuro se evalúa en el bimestre 4, hay que acumularlo 2 bimestres más para tenerlo en la fecha deseada y que genere intereses esos 2 bimestres; de esta forma:

$$15,000 = VF\,(1+i)^2$$

Sustituyendo:

$$15,000 = X\left[\frac{(1.04)^4 - 1}{0.04}\right](1.04)^2 = X\,(4.246)(1.0816)$$

Resolviendo para el depósito:

$$X = 3,265.86$$

Ejemplo 5.15 ¿Cuánto acumularán 7 depósitos semestrales de $18,000, si la tasa de interés ofrecida es del 30% convertible mensualmente y el dinero se retira 9 meses después del último depósito?

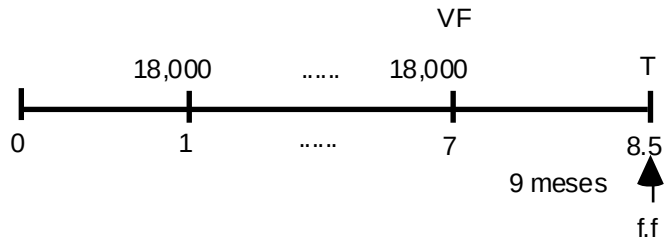
La tasa debe ser convertida a efectiva semestral. Calculando la tasa efectiva mensual:

$$i_m = \frac{i^{(12)}}{12} = \frac{0.30}{12} = 0.025$$

Por tanto, la tasa efectiva semestral es:

$$i_s = (1.025)^6 - 1 = 0.1597$$

El diagrama quedaría como sigue:



En el diagrama se muestran los 7 pagos semestrales. Después de éstos se esperan nueve meses (1.5 semestres) que generan intereses, para que a los 8.5 semestres se calcule la cantidad acumulada.

Esta cantidad está representada por "T" en la gráfica.

$$\mathrm{T} = \mathrm{VF}\left(1+\mathrm{i}\right)^{9/6}$$

El valor futuro estaría calculado en el mes 7 según la gráfica, por lo que es necesario acumularlo $9/6 = 1.5$ semestres para conocer la cantidad total retirada.

$$T = 18,000\left[\frac{(1.1597)^{7}-1}{0.1597}\right](1.1597)^{9/6} = 256,335.69$$

Ejemplo 5.16 Una persona tiene planeado realizar 8 depósitos trimestrales. Si quiere acumular un total de $7,250 un trimestre después de haber realizado el último depósito, y le ofrecen una tasa del 12% convertible mensualmente, ¿cuánto debería depositar cada trimestre?

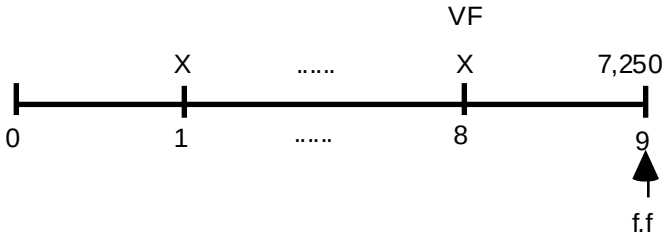
Obteniendo la tasa efectiva mensual:

$$\mathrm{i}_{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{i}^{(12)}}{12} = \frac{0.12}{12} = 0.01$$

Por tanto, la tasa efectiva trimestral es:

$$\mathrm{i}_{\mathrm{t}} = (1.01)^{3} - 1 = 0.0303$$

La gráfica quedaría:



Para resolver este problema sólo basta llevar el valor futuro de la anualidad un trimestre más para situarla en la fecha focal:

$$7,250 = VF\left(1+i\right)$$

El valor futuro debe ser acumulado un periodo para colocarlo en la fecha focal, que es precisamente donde se realizará el retiro. Sustituyendo:

$$7,250 = X\left[\frac{(1.0303)^{8}-1}{0.0303}\right](1.0303) = X(8.90)(1.0303)$$

Despejando X:

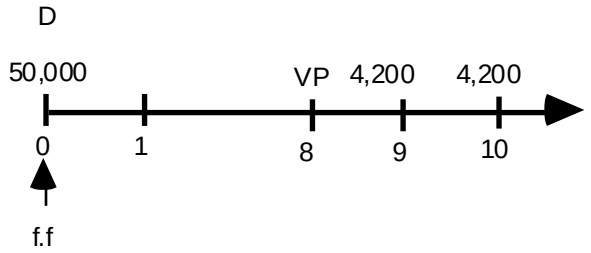
$$X = 790.49$$

5.5 Algunas observaciones acerca del valor presente y valor futuro de las anualidades.

A propósito, en todos los ejercicios de anualidades se han incluido diagramas para ilustrar tanto fechas focales, como puntos donde se evalúan las series de pagos o depósitos hasta el momento contempladas. Todos los diagramas se han dibujado de tal manera que se muestra tanto el inicio como el final de la serie de pagos, sin embargo, esto no es necesario para resolver un problema determinado. Como veremos a continuación, para dar solución a los problemas que involucran valores presentes, sólo es necesario graficar el inicio de los pagos, sin importar donde terminan; mientras que para el caso de valores futuros, es suficiente con graficar los últimos pagos. Analícense los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.17 Una persona pagará por su casa $4,200 mensuales durante 10 años y comenzando a partir del mes 9. Si la tasa cobrada es del 2.5% mensual y dio un enganche de $50,000, ¿cuál sería el valor de la casa el día de hoy?

Para fines del ejemplo ¿importa cuándo se realiza el último pago? En este caso no importa, puesto que nos interesa el valor presente. Lo que nos interesa es conocer el momento del primer pago para saber donde evalúa la anualidad; ya que este valor debe ser llevado a la fecha focal. El diagrama podría quedar así:



En el diagrama sólo se muestran los 2 primeros pagos, en los meses 9 y 10. Lo importante es establecer donde evalúa el valor presente la anualidad y la fecha focal. Lo que debemos cuidar del diagrama es que nos muestre cuanto tiempo debe ser llevado el valor presente a la fecha focal. De esta forma el valor de la casa representada por D, se puede calcular de la siguiente manera:

$$D = 50,000 + VP\,(1+i)^{-8}$$

Sustituyendo valores tomando en cuenta 120 pagos:

$$D = 50,000 + \left[4,200\ \frac{1-(1.025)^{-120}}{0.025} \right] \left[(1.025)^{-8} \right]$$

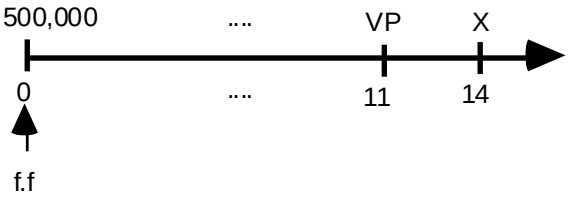
Finalmente:

$$D = 180,762.56$$

Parecería ser que con el enganche y las mensualidades que no son bajas, una persona podría adquirir una casa con un mayor valor. Desafortunadamente en países como los nuestros donde imperan altas tasas de interés es muy alto el costo de financiamiento. Para este ejemplo se supuso una tasa mensual del 2.5%, que equivale a una tasa del 30% anual convertible mensualmente.

Ejemplo 5.18 Un préstamo de $500,000 será pagado con 15 pagos trimestrales comenzando a los 14 meses y a una tasa del 20% convertible trimestralmente. Calcular el valor de cada pago.

Como no es necesario determinar el momento en que se efectúa el último pago, el diagrama podríamos presentarlo de la siguiente forma:



El tiempo en la gráfica está medido en meses, por lo que si el primer pago se realiza en el mes 14, entonces el valor presente de los pagos se calcula un trimestre antes o sea en el mes 11. Ahora bien, primero encontremos la tasa efectiva trimestral:

$$i_t = \frac{i^{(4)}}{4} = \frac{0.20}{4} = 0.05$$

Ahora plantearemos la ecuación:

$$500,000 = VP\,(1+i)^{-11/3}$$

El valor presente debe ser regresado 11 meses en el tiempo, y como se tiene una tasa trimestral, el tiempo es de $11/3$ trimestres. Sustituyendo:

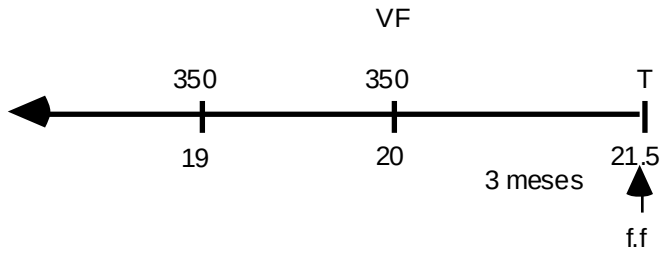
$$500,000 = X\left[\frac{1-(1.05)^{-15}}{0.05}\right]\left[(1.05)^{-11/3}\right] = X(10.38)(0.84)$$

Finalmente:

$$X = 57,607.77$$

Ejemplo 5.19 Se realizarán 20 depósitos bimestrales de $350 donde el primer depósito se efectuará dentro de 5 meses, y el dinero se retirará 3 meses después del último depósito. Encontrar la cantidad retirada si la tasa de interés es del 18% convertible bimestralmente.

En este caso la tasa efectiva bimestral es del 3% y la gráfica podría quedar así:



En la figura se muestran sólo los 2 últimos pagos bimestrales, los 3 meses de espera, para finalmente en el bimestre 21.5 retirar la cantidad total "T". En el problema lo que importa es conocer la cantidad retirada. Con el diagrama lo único que sabemos es que la cantidad se retira 3 meses después de haber efectuado el último depósito. Planteando el problema se tendría:

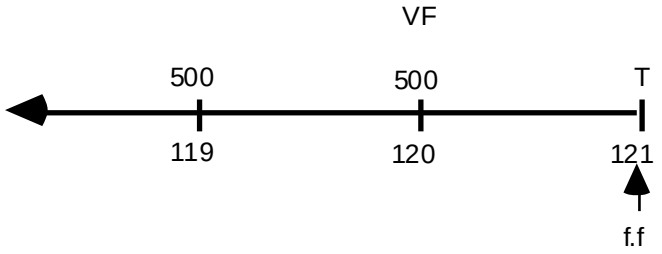
$$T = VF\left(1+i\right)^{3/2}$$

El valor futuro de los pagos de $350 se evalúa en el bimestre 20, por lo que éste debe ser acumulado 3 meses más. Como se tiene una tasa bimestral el tiempo es $3/2 = 1.5$ bimestres. Sustituyendo:

$$T = 350\left[\frac{(1.03)^{20}-1}{0.03}\right](1.03)^{3/2} = 9,831$$

Ejemplo 5.20 Se han venido depositando durante 10 años de forma mensual $500. Si el dinero es retirado un mes después del último depósito, ¿cuánto es lo que se logró acumular a una tasa del 12% convertible mensualmente?

La tasa efectiva mensual es del 1%. La gráfica quedaría de la siguiente manera:



No interesa en este caso cuando comenzó, lo importante es que se desea retirar el dinero un mes después del último depósito, como lo muestra el

diagrama. Al realizarse depósitos mensuales durante 10 años se efectúan en total 120. Como la anualidad se evalúa al realizar el último depósito, entonces ésta debe ser llevada un periodo hacia adelante para evaluarla en la fecha focal. De esta forma:

$$T = 500\left[\frac{(1.01)^{120}-1}{0.01}\right](1.01) = 116,169.54$$

Algunas claves para evaluar anualidades son:

Para valor presente grafica los primeros pagos, y recuerda que la fórmula evalúa un periodo antes del primero. Posteriormente este valor hay que llevarlo a la fecha focal. En valor presente no te importa donde se terminan los pagos.

Para valor futuro grafica los últimos depósitos, recordando que la fórmula evalúa al momento de realizar el último de ellos. Teniendo el valor futuro, hay que llevarlo a la fecha focal. Aquí no interesa donde se efectúan los primeros depósitos.

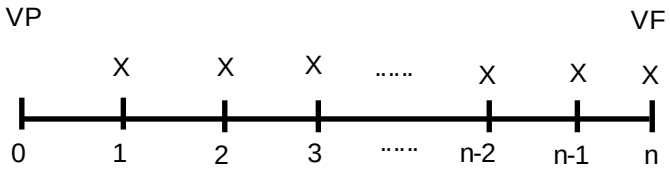
5.6 Anualidades vencidas, anticipadas y diferidas.

Aunque en las secciones anteriores ya se han manejado todos estos tipos de anualidades, sólo resta distinguir unas de otras, así como obtener algunas relaciones que pudieran resultar valiosas.

El nombre que reciben las anualidades está en función de la forma en que se realizan los pagos o los depósitos.

Una anualidad vencida es aquélla donde el primer pago se realiza una vez transcurrido un periodo; esto es, si los pagos son mensuales el primero se realiza al mes; si los pagos son anuales el primero se efectúa exactamente al año, etc. El diagrama de tiempo correspondiente se ilustra en la figura 5.5

FIG 5.5



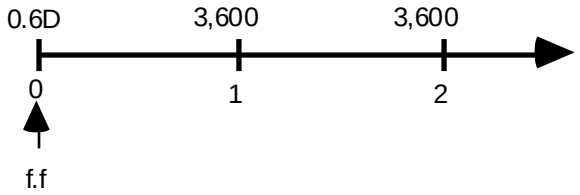
De acuerdo al diagrama, como el primer pago se hace al finalizar el primer periodo, la fórmula de valor presente evalúa directamente en cero, que comúnmente es donde se efectúa la transacción.

Por otra parte, el valor futuro de una anualidad vencida se evalúa exactamente al momento de realizar el último pago. Por lo tanto las fórmulas que conocemos, se aplican directamente al caso de anualidades vencidas.

Es importante hacer notar que si no se especifica la forma en que han de realizarse los pagos, por convención se debe asumir que éstos son vencidos.

Ejemplo 5.21 Un automóvil se pone a la venta con la promoción de dar un 40% de enganche y el resto con 18 mensualidades fijas de $3,600 a una tasa del 24% anual. ¿Cuál es el precio del automóvil de contado?

En este caso no se especifica el momento de realizar el primer pago, por lo que se asume que son vencidos. Sea D el valor del auto, el diagrama simplificado quedaría:



En el diagrama sólo se muestran los 2 primeros pagos sabiendo que el último se realiza a los 18 meses. En cero se representa la cantidad financiada, ya que se paga el 40% de enganche y resta únicamente el 60% del valor del automóvil, que es lo que se debe liquidar precisamente con las mensualidades.

La tasa efectiva mensual es:

$$i_m = (1.24)^{1/12} - 1 = 0.018$$

La ecuación que involucra el precio del auto y los pagos es:

$$0.6\,D = (3,600)\left[\frac{1-(1.018)^{-18}}{0.018}\right]$$

Realizando operaciones:

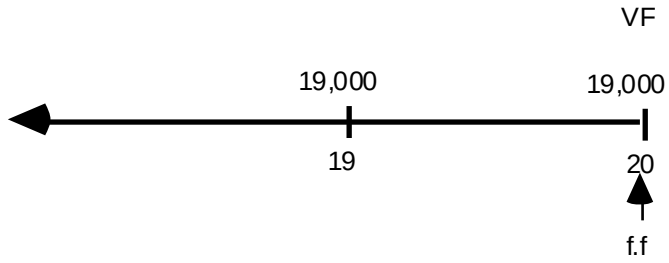
$$0.6\,D = (3,600)(15.2472)$$

y el valor del automóvil sería:

$$D = 91,483.23$$

Ejemplo 5.22 Calcular el valor futuro de una anualidad que paga $19,000 semestrales vencidos durante 10 años, a una tasa del 18% convertible semestralmente.

Al pedir el valor futuro de una anualidad vencida, se sabe que éste debe ser calculado al momento de realizar el último pago. En total se tiene 20 pagos, dado que los pagos son semestrales. Aquí podemos abreviar de nuevo el diagrama y sólo colocar los últimos 2 pagos:



Como el valor futuro de una anualidad vencida "cae" directamente sobre el último pago, sólo basta con aplicar la fórmula de valor futuro. Como se tiene una $i^{(2)} = 18\ \%$ la tasa efectiva semestral es del 9%.

$$VF = 19,000\left[\frac{(1.09)^{20}-1}{0.09}\right] = 972,042.27$$

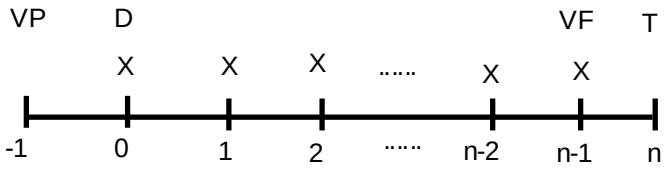
Para encontrar el valor futuro o el valor presente de anualidades vencidas, con las fórmulas que conocemos se pueden calcular directamente, sin necesidad de realizar ningún tipo de adecuación.

Una anualidad anticipada es aquélla donde el primer pago se realiza al inicio del primer periodo. Si se compra un artículo y se hicieran pagos anticipados, el primer pago se haría al momento de la compra.

Los pagos anticipados pueden considerarse como la renta de una casa, en donde se paga por adelantado el mes en que se va a vivir. De esta forma aunque se paga hoy, la renta se considera para todo el mes.

La figura 5.6 muestra un esquema típico de una anualidad anticipada.

FIG 5.6



Al ser la anualidad anticipada el primer pago se efectúa en cero, y aunque se realizan n pagos, el último se hace en "n-1", por el pago en cero.

Aún cuando el último pago se hace en "n-1" se considera que transcurren n periodos completos. Retomando el caso de la renta de la casa, supóngase que vivirás 12 meses en la casa, si empiezas a pagar el primero de enero, terminarías de pagar el primero de diciembre; pero como pagaste por adelantado tienes derecho a vivir todo el mes de diciembre, transcurriendo efectivamente los 12 meses.

En la figura 5.6 "D" representa el valor presente de los pagos, evaluados en "cero" que es donde se efectúa la operación. Como la fórmula de valor presente evalúa un periodo antes del primer pago, para encontrar el valor de "D" sólo hay que acumular un periodo el valor presente:

$$D = VP\left(1+i\right)$$

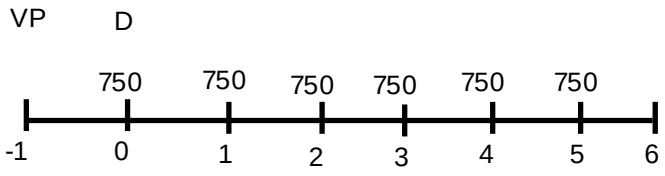
Para calcular el valor futuro de la anualidad anticipada "T", como se asume que transcurre todo el periodo completo y dado que el valor futuro se evalúa al momento de efectuar el último pago se tiene:

$$T = VF\left(1+i\right)$$

Así pues, el valor futuro de una anualidad anticipada implícitamente contempla que como el último depósito se hizo al principio del periodo, todavía se generarán intereses durante dicho periodo.

Ejemplo 5.23 Calcular el valor presente de 6 mensualidades anticipadas de $750 a una tasa del 20% convertible mensualmente.

En la gráfica, a pesar de ser 6 mensualidades, la última se da al principio del mes 6 o lo que es lo mismo, al final del mes 5. Las 5 mensualidades, más la que está en cero, dan el total de 6.



Calculando la tasa efectiva mensual:

$$i_m = \frac{0.20}{12} = 0.01667$$

El valor presente, al día de hoy, de los 6 pagos mensuales anticipados se obtiene acumulando un periodo el valor presente de nuestra fórmula tradicional.

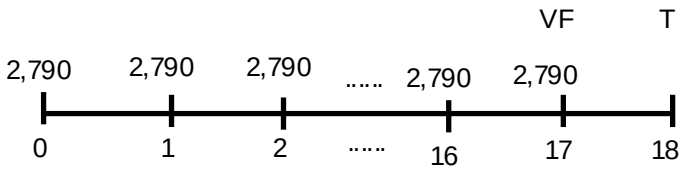
$$D = VP(1+i)$$

Sustituyendo valores.

$$D = (750)\left[\frac{1-(1.01667)^{-6}}{0.01667}\right](1.01667) = 4{,}319.56$$

Ejemplo 5.24 Se realizarán depósitos bimestrales anticipados de $2,790 durante 3 años. Si la tasa ofrecida es del 1.23% bimestral, ¿cuál es el valor futuro una vez que transcurrieron los 3 años?

Si son 3 años se harán un total de 18 depósitos bimestrales. En la gráfica parecerían ser 17 pero hay que contabilizar el pago en cero. Véase como en el bimestre 2 ya se han hecho 3 depósitos.



El valor futuro se quiere calcular a los 3 años, es decir, a los 18 bimestres (por ser depósitos anticipados se generan todavía los intereses del último periodo). De esta forma la ecuación es:

$$T = VF(1+i)$$

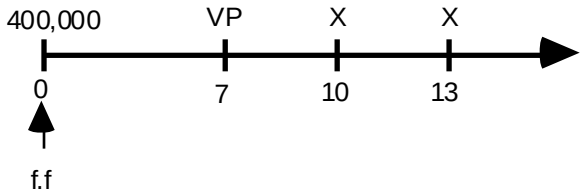
sustituyendo:

$$T = (2,790)\left[\frac{(1.0123)^{18}-1}{0.0123}\right](1.0123) = 56,518.11$$

Una anualidad diferida es aquélla que no es vencida ni anticipada, es decir, el primer pago se puede efectuar en cualquier momento que no sea hoy o al final del primer periodo. El diagrama puede ser tan general que no se mostrará directamente, pero se podrán visualizar algunos de ellos en los próximos ejemplos.

Ejemplo 5.25 Determinar el valor de cada uno de los 15 pagos trimestrales que deben efectuarse, por una deuda de $400,000 contraída el día de hoy, si la tasa de interés es del 26% convertible trimestralmente y el primer pago se realizará a los 10 meses.

Esta anualidad es diferida debido a que el primer pago no corresponde al día de hoy ni al final del primer trimestre. Como el problema tiene que ver con el valor presente, sólo es necesario graficar los primeros pagos sin importarnos donde se termina de pagar.



En el diagrama se muestran los pagos que han de realizarse en los meses 10 y 13. El valor presente de la anualidad evalúa un trimestre antes del primer pago, esto es en el mes 7. Para colocar la anualidad en la fecha focal sólo faltaría "regresar" 7 meses dicho valor presente.

Calculando la tasa efectiva trimestral:

$$i_t = \frac{0.26}{4} = 0.065$$

De esta forma los pagos se pueden obtener de la siguiente ecuación:

$$400,000 = VP\,(1+i)^{-7/3}$$

El valor presente tiene que ser regresado 7 meses; como la tasa es trimestral, se tiene que $t = 7/3$.

Sustituyendo:

$$400,000 = \mathrm{X}\left[\frac{1-(1.065)^{-15}}{0.065}\right](1.065)^{-7/3} = \mathrm{X}(9.40)(0.8633)$$

Donde:

$$X = 49,274.77$$

Ejemplo 5.26 La tasa que ofrece en este momento cierta institución financiera es del 21.5% convertible mensualmente. Si se realizarán 30 depósitos bimestrales de $170 y el dinero se retirará un año después de haber efectuado el último depósito. ¿Cuánto es lo que se acumulará en total?

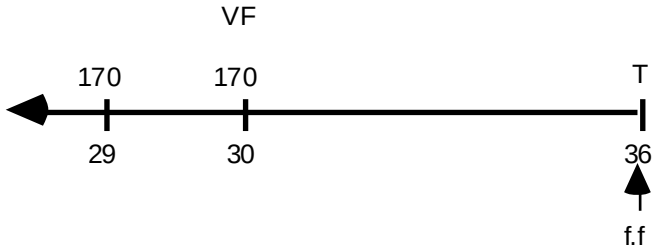
Antes de graficar calculemos la tasa efectiva bimestral. Primero podemos obtener la tasa efectiva mensual:

$$i_m = \frac{0.215}{12} = 0.0179$$

De aquí ya podemos calcular la tasa efectiva bimestral:

$$i_b = (1.0179)^2 - 1 = 0.03615$$

La gráfica quedaría:



Se esquematizan los pagos 29 y 30. Como se desea el valor acumulado hasta un año después, la fecha focal se localiza en el bimestre 36 (6 bimestres después del último pago). La cantidad total "T" que se retiraría sería:

$$T = (170)\left[\frac{(1.03615)^{30}-1}{0.03615}\right](1.03615)^{6} = 11,068.81$$

Para resolver problemas con anualidades de cualquier tipo, a manera de sugerencia, se podrían seguir estos pasos:

1. Realizar un diagrama de tiempo sin omitir la fecha focal. Si la anualidad tiene que ver con valor presente graficar los primeros pagos y si la anualidad tiene que ver con valor futuro graficar los últimos pagos. Recordar que la fecha focal es el momento donde finalmente será evaluada la anualidad.

2. Antes de realizar el planteamiento, es conveniente convertir la tasa de interés conforme la periodicidad de los pagos. La tasa de interés siempre debe ser efectiva por periodo de pago.

3. Plantear la ecuación, recordando siempre que la fórmula de valor presente evalúa un periodo antes del primer pago y la fórmula de valor futuro evalúa al momento de efectuar el último pago. El valor presente o futuro de la anualidad hay que llevarlo a la fecha focal indicada.

5.7 Relación entre anualidades vencidas y anticipadas.

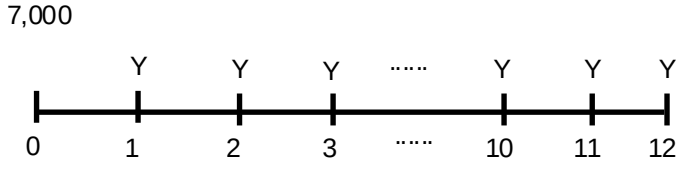
Existen una serie de relaciones interesantes entre este tipo de anualidades, donde su análisis además de reforzar los conocimientos adquiridos en las secciones previas, nos permite profundizar aún más en su estructura.

Ejemplo 5.27 Para comprar una sala con valor de $7,000 se realizarán 12 pagos mensuales a una tasa del 24% convertible mensualmente. Si se tiene la opción de elegir entre pagos vencidos y anticipados:

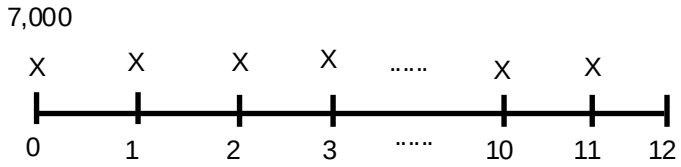
a) Antes de realizar cualquier cálculo, ¿con qué tipo de anualidad esperarías que los pagos fueran menores? ¿Por qué?
b) Calcular el valor de los pagos para ambas opciones y confirmar tu respuesta del inciso anterior.

a) Para contestar esta pregunta vamos a graficar primeramente ambas anualidades.

Anualidad vencida



Anualidad anticipada.



En la gráfica anterior se denotan por "Y" los pagos vencidos y por "X" los pagos anticipados, haciendo notar que deben ser diferentes, ya que aunque son el mismo número de pagos no es lo mismo empezar a pagar dentro de un mes (caso vencido), que empezar a pagar hoy (caso anticipado). Para fines de la exposición se dirá entonces que la anualidad anticipada paga "más rápido" que la anualidad vencida.

Para contestar ya concretamente la pregunta vamos a ponernos primero del lado del vendedor. El vendedor en términos generales preferirá que le paguen lo más rápido posible, ya que entre más tiempo se tarden en pagarle, él tendrá que cobrar un poco más por concepto de intereses, por tanto **Y>X**.

Por otra parte, del lado del comprador, si al fin y al cabo tendrá que pagar el mismo número de mensualidades, él preferirá pagar en mayor tiempo. Para tener un incentivo y pagar más rápidamente, el valor de cada pago anticipado tendría que ser menor. Esto es: **X<Y.**

En conclusión, como los pagos anticipados se realizan antes, y el dinero vale más entre más rápido se tenga, entonces éstos deben ser menores que los pagos vencidos.

b) Para calcular los pagos de la anualidad vencida aplicaremos la fórmula de valor presente, y como ya sabemos la fórmula evalúa un periodo antes del primer pago que es precisamente donde están los $7,000. Como la tasa efectiva mensual es del 2% entonces:

$$7,000 = Y\left[\frac{1-(1.02)^{-12}}{0.02}\right] = Y\,(10.575)$$

Donde:

$$Y = 661.92$$

Para una anualidad anticipada se tiene que la fórmula evalúa un periodo antes del primer pago, que en este caso sería menos uno, por lo que hay que acumularla un periodo. Así:

$$7,000 = X\left[\frac{1-(1.02)^{-12}}{0.02}\right][1.02] = X(10.575)(1.02)$$

Donde:

$$X = 648.94$$

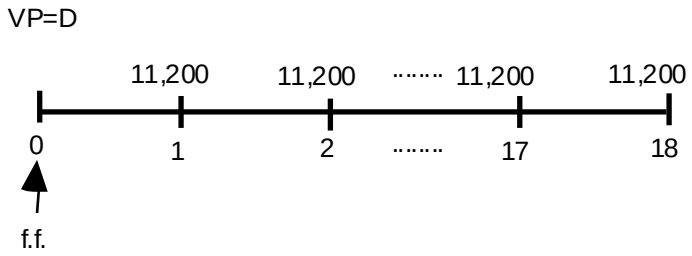
Como el análisis nos lo indicaba, el valor de los pagos anticipados fue menor que el de los vencidos. **X < Y**

Ejemplo 5.28 Se realizarán 18 pagos semestrales de $11,200 a una tasa del 15% semestral. ¿Cuáles pagos tendrán un mayor valor presente, los vencidos o los anticipados?

Teóricamente, como se mencionó en el ejemplo 5.27, los pagos anticipados tienen mayor valor porque se reciben primero, por lo que se esperaría que el valor presente de los anticipados fuera mayor que el de los vencidos, siempre y cuando el valor de los pagos sea el mismo.

Para la anualidad vencida:

Anualidad vencida

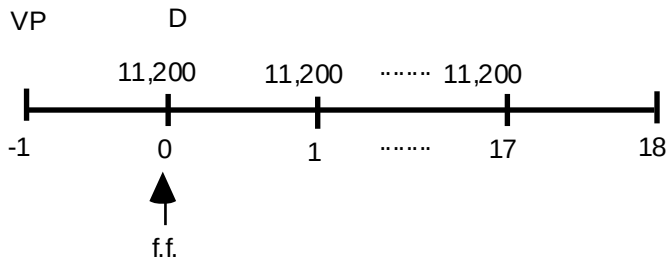


El valor presente para la vencida es:

$$D = (11,200)\left[\frac{1-(1.15)^{-18}}{0.15}\right] = 68,633.22$$

Para los pagos anticipados:

Anualidad anticipada.



El valor presente para la anticipada es:

$$D = (11,200)\left[\frac{1-(1.15)^{-18}}{0.15}\right][1.15] = 78,928.2$$

Como se esperaba, el valor de los pagos anticipados fue mayor.

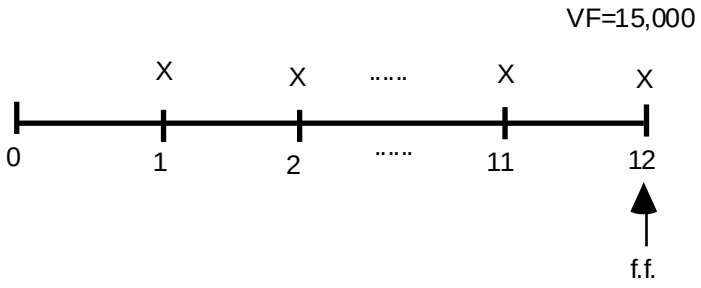
Para el caso del valor futuro se esperaría que siendo los depósitos iguales, los anticipados tuvieran un mayor valor que los vencidos, puesto que al realizarse antes, generarán mayores intereses. En el caso en que se quisiera acumular una cantidad fija, los depósitos anticipados tendrían que ser menores a los vencidos, puesto que generan mayores intereses.

Ejemplo 5.29 Se desean acumular $15,000 en un año, por lo que se piensan realizar 12 depósitos mensuales a una tasa del 9% convertible mensualmente.

a) Calcular el valor de los depósitos vencidos.

b) Calcular el valor de los depósitos anticipados.

a) Para los depósitos vencidos se tiene:



La tasa mensual sería:

$$i_m = \frac{0.09}{12} = 0.0075$$

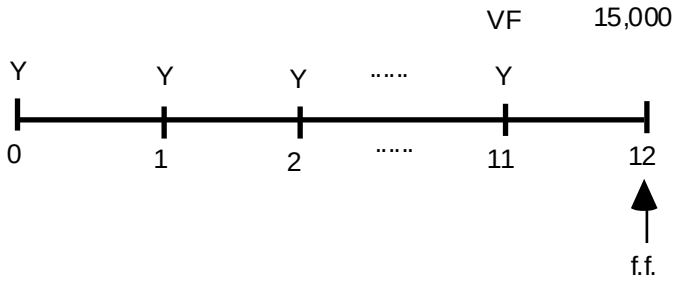
Planteando la ecuación:

$$15,000 = X\left[\frac{(1.0075)^{12} - 1}{0.0075}\right] = X(12.5076)$$

Calculando el pago:

$$\mathrm{X} = 1,199.27$$

b) Para la anualidad anticipada se tiene:



Planteando:

$$15,000 = \mathrm{Y}\left[\frac{(1.0075)^{12} - 1}{0.0075}\right][1.0075]$$

Despejando el pago:

$$Y = 1,190.34$$

Nuevamente vemos que los depósitos anticipados deben ser menores que los vencidos, y esto es porque al ser anticipados, tienen la oportunidad de generar más intereses por haberse depositado antes, por tanto el depósito puede ser menor para acumular la cantidad deseada.

De los ejemplos anteriores podemos deducir entonces que teniendo el mismo número de pagos y la misma tasa de interés:

1. **Los pagos anticipados serán menores que los vencidos para un mismo adeudo o un mismo valor futuro.**

2. **El valor presente o futuro de pagos anticipados será mayor que el de los vencidos siempre que los pagos anticipados o vencidos sean iguales.**

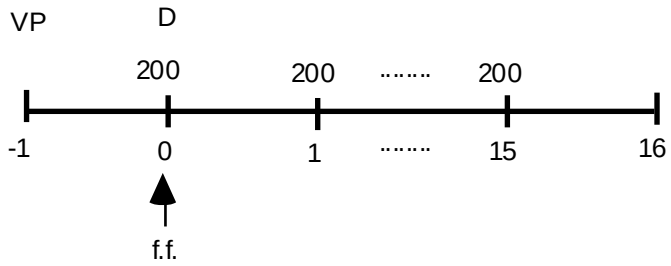
El valor presente de una anualidad anticipada comúnmente evalúa en menos uno, ya que el primer pago se realiza hoy. Una manera alternativa de evaluar el valor presente de una anualidad anticipada se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.30 Calcular el valor presente de 16 pagos bimestrales anticipados de $200, a una tasa del 2.5% bimestral.

a) Evaluando la anualidad en menos uno (como hasta ahora)

b) Evaluando la anualidad en cero (forma alternativa)

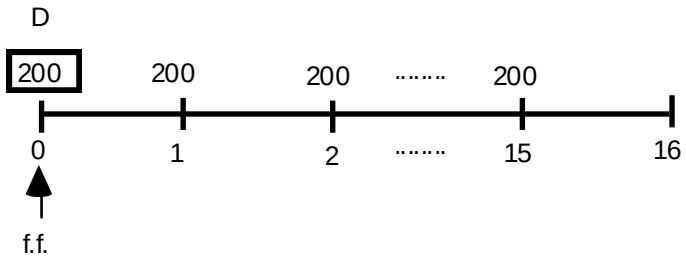
a) Evaluando en menos uno se tendría:



De aquí que:

$$D = (200)\left[\frac{1-(1.025)^{-16}}{0.025}\right][1.025] = 2,676.28$$

b) Utilizando la forma alternativa y evaluando todo directamente en cero se utilizaría la siguiente gráfica:

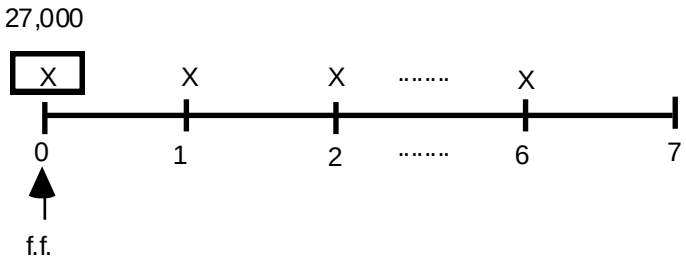


En la gráfica, los primeros $200 se han separado para ver que la anualidad anticipada de 16 pagos, se puede dividir en un pago el día de hoy más 15 pagos vencidos. El valor presente total representado por "D" sería entonces:

$$D = 200 + (200)\left[\frac{1-(1.025)^{-15}}{0.025}\right] = 2,676.28$$

La anualidad anticipada puede dividirse en dos partes: un pago hecho el día de hoy, y los restantes se toman como una anualidad vencida.

Ejemplo 5.31 Calcular el valor de 7 pagos anuales anticipados que deben elaborarse para liquidar un adeudo de $27,000 si se cobra una tasa del 33%. Plantear el problema como un pago hoy y 6 pagos vencidos.



La ecuación de valor considerando un pago de X, más 6 pagos vencidos de X sería:

$$27,000 = X + X\left[\frac{1-(1.33)^{-6}}{0.33}\right] = X + X(2.4828)$$

Donde:

$$X = 7,752.35$$

5.8 La incógnita es el número de pagos "n".

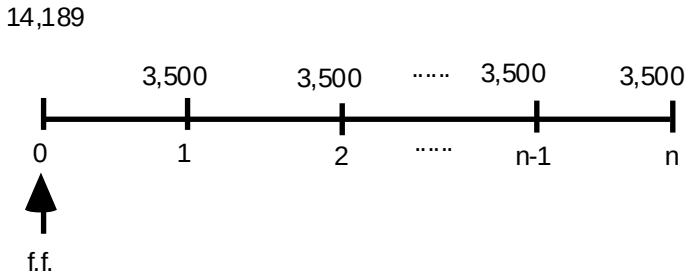
Los problemas que hemos resuelto han girado alrededor tanto del valor de los pagos, como del valor presente o futuro de los mismos. En esta sección y la siguiente abordaremos el problema de encontrar el número de pagos y la tasa de interés que se cobra respectivamente.

Encontrar el número de pagos cuando se conocen las demás variables se reduce a realizar un despeje utilizando logaritmos. Algunas leyes de logaritmos ya se vieron en la sección 4.4.

Véanse los siguientes ejemplos para el manejo del número de pagos:

Ejemplo 5.32 Una deuda de $14,189.273 será liquidada mediante pagos anuales de $3,500 a una tasa del 21%. ¿Cuántos pagos serán necesarios para saldar el adeudo?

Como no se especifica la forma de los pagos, éstos se asumen vencidos y el diagrama quedaría:



Planteando la ecuación:

$$14,189.273 = (3,500)\left[\frac{1-(1.21)^{-n}}{0.21}\right]$$

Para despejar "n" se recomienda ir haciendo las operaciones que se puedan a manera de simplificar la operación. Despejando el 3,500 y el 0.21:

$$\frac{(14,189.273)(0.21)}{3,500} = 0.85135637 = 1-(1.21)^{-n}$$

Pasando el 0.851 del lado derecho y el número con exponente del lado izquierdo:

$$(1.21)^{-n} = 1 - 0.85135637 = 0.14864363$$

Obteniendo logaritmos y despejando -n:

$$-n = \frac{\ln(0.14864363)}{\ln(1.21)} = \frac{-1.9062}{0.19062} = -10$$

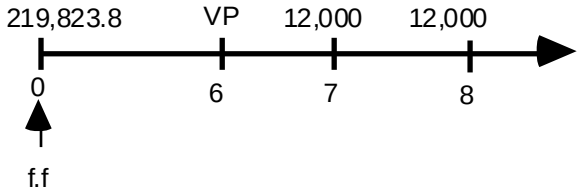
Donde:

$$n = 10$$

Se necesitan realizar 10 pagos anuales exactos de $3,500.

Ejemplo 5.33 Se acuerda pagar un automóvil con valor de $219,823.81 con pagos mensuales de $12,000 comenzando a pagar dentro de 7 meses. Si la tasa cobrada es del 1.5% mensual, ¿cuántos pagos se pactaron?

El diagrama podría ser:



Para simplificar el diagrama, se grafican únicamente los 2 primeros pagos. Planteando la ecuación:

$$219,823.81 = (12,000)\left[\frac{1-(1.015)^{-n}}{0.015}\right](1.015)^{-6}$$

Pasando al otro lado de la ecuación las cantidades que no tienen "n"

$$\frac{(216,823.81)(0.015)}{(12,000)(1.015)^{-6}} = 0.300456 = 1-(1.015)^{-n}$$

Pasando el 0.3 del lado derecho y el número con exponente del lado izquierdo:

$$(1.015)^{-n} = 1 - 0.300456 = 0.69954$$

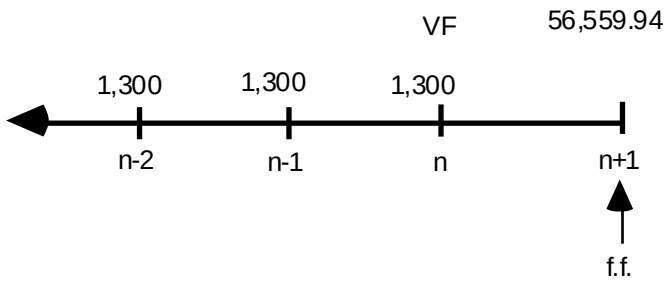
Obteniendo logaritmos y despejando -n:

$$-n = \frac{\ln(0.69954)}{\ln(1.015)} = \frac{-0.3573}{0.0148} = -24$$

Donde:

$$n = 24$$

Ejemplo 5.34 Se desean acumular $56,559.94, por lo que se realizarán depósitos mensuales de $1,300 a una tasa del 1% mensual. Si el dinero se retirará un mes después del último depósito, ¿cuántos depósitos serán necesarios?



Siendo el número de depósitos "n", la cantidad que se desea tener está un periodo después del último depósito, por lo que el planteamiento sería:

$$56,559.94 = 1,300\left[\frac{(1.01)^n - 1}{0.01}\right][1.01]$$

Despejando "n"

$$\frac{(56,559.94)(0.01)}{(1,300)(1.01)} = 0.430769 = (1.01)^n - 1$$

Por tanto:

$$n = \frac{\ln(1 + 0.430769)}{\ln(1.01)} = \frac{0.3582}{0.00995} = 36$$

El problema al encontrar el número de periodos es cuando "n" no es entero. Supóngase que n=18.34, esto significa que si se realizan 18 pagos completos entonces no se ha saldado aún el adeudo, mientras que si se realizan 19 entonces se paga de más. Esto nos llevaría a que se tengan que realizar 18 pagos completos más un pago extra que compense lo que falta por pagar.

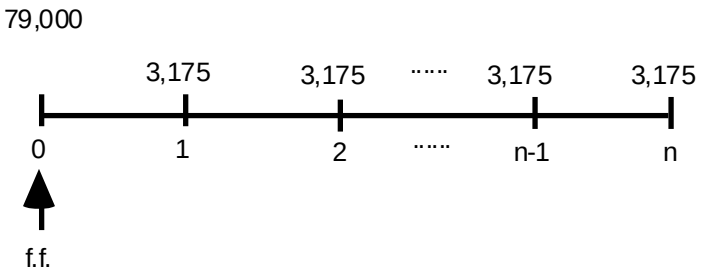
Ejemplo 5.35 Por un adeudo de $79,000 se realizarán pagos mensuales de $3,175, cobrándose una tasa del 26% convertible mensualmente.

a) ¿Cuántos pagos completos de $3,175 deberán realizarse?

b) ¿De cuánto deberá ser el pago extra, que se realizará un mes después del último pago completo para cancelar la deuda?

c) ¿De cuánto deberá ser el pago extra, si se realiza al efectuar el último pago?

a) El gráfico podría ser:



La tasa mensual efectiva correspondiente a una tasa del 26% convertible mensualmente es:

$$i_m = \frac{0.26}{12} = 0.02167$$

Procedemos a encontrar el número de pagos. Planteando la ecuación:

$$79,000 = (3,175)\left[\frac{1-(1.0217)^{-n}}{0.0217}\right]$$

Despejando "n"

$$\frac{(79,000)(0.0217)}{(3,175)} = 0.5391 = 1-(1.0217)^{-n}$$

Donde:

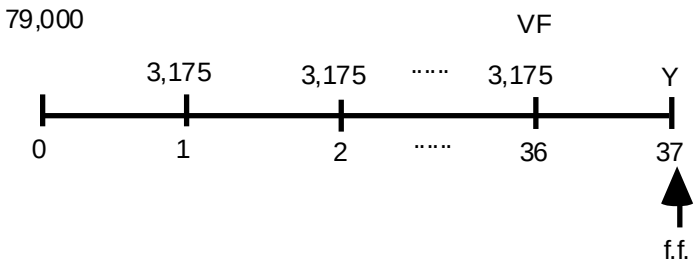
$$-n = \frac{\ln(0.4609)}{\ln(1.0217)} = \frac{-0.7746}{0.0214} = -36.136$$

Finalmente:

$$n = 36.136$$

El número de pagos completos de $3,175 es de 36.

b) Como el número de pagos no es entero, se tiene que buscar una cantidad extra que debe ser pagada para liquidar exactamente el pago. Si se realizan 36 pagos no se termina de pagar y con 37 pagos se excede el pago. Si representamos por Y el pago extra que debe realizarse un mes después, y utilizando como fecha focal el momento en que se realiza este pago se tiene:



Recordando de las ecuaciones de valor: lo que se debe es igual a lo que se paga, entonces la deuda de $79,000 debe ser igual a los 36 pagos de $3,175, más el pago extra de Y a efectuarse en el mes 37. Planteando la ecuación con fecha focal en el mes 37:

$$79,000(1+\mathrm{i})^{37} = \mathrm{VF}\,(1+\mathrm{i}) + \mathrm{Y}$$

Los $79,000 deben ser llevados hasta el mes 37, por eso el factor $(1+i)^{37}$. Ahora bien, del lado derecho de la ecuación se tienen los 36 pagos completos que con la fórmula se evalúan en el mes 36, por eso hay que llevarlos un periodo más. Finalmente se tiene que sumar el pago extra, que como está en la fecha focal, no hay que hacerle nada. Sustituyendo:

$$79,000\ (1.0217)^{37} = (3,175)\left[\frac{(1.0217)^{36}-1}{0.0217}\right](1.0217) + \mathrm{Y}$$

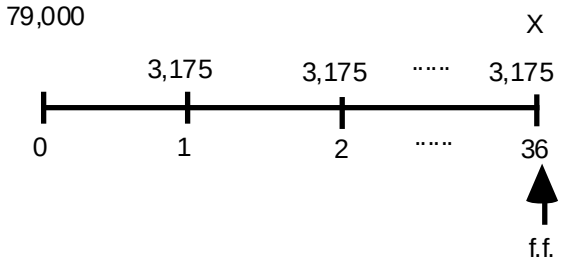
Resolviendo algunas operaciones:

$$174,609.71 = 174,173.09 + \mathrm{Y}$$

Despejando el pago:

$$\mathrm{Y} = 436.61$$

c) Si consideramos ahora que el pago extra, representado por "X", se hace al momento de efectuar el último pago completo se tiene:



Planteando la ecuación con fecha focal en 36:

$$79,000(1+i)^{36} = VF + X$$

Ahora los $79,000 deben ser llevados 36 meses. Del lado derecho, los 36 pagos se evalúan directamente en 36 ya que ahí se efectúa el último pago, que sumándole el pago extra de X, queda completa la ecuación de valor. Sustituyendo valores:

$$79,000\ (1.0217)^{36} = (3,175)\left[\frac{(1.0217)^{36}-1}{0.0217}\right] + X$$

Realizando operaciones:

$$170,906.75 = 170,479.37 + X$$

Donde:

$$X = 427.35$$

Nótese que si el pago extra se realiza en 37 como en el inciso b, éste resulta ser mayor que si se efectúa en 36 como en el inciso c. Esto es porque entre más tiempo pase, el pago debe ser más alto por los intereses generados. Una vez teniendo el pago extra en 37, el pago en 36 pudo haberse obtenido de la siguiente manera:

Se sabe que si el pago extra se realiza en 37 éste es de $436.61. Si el pago se desea hacer ahora en el mes 36 sólo basta con "regresar" un mes o traer a valor presente este pago, con la tasa de interés mensual, quedando:

$$X_{36} = \frac{X_{37}}{1+i} = \frac{436.61}{1.02167} = 427.35$$

Por lo tanto, el último pago en el mes 36 debe ser de:

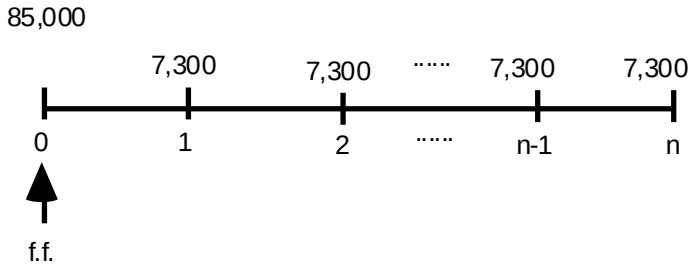
$$X = 3,175 + 427.35 = 3,602.35$$

Esto significa que si ya se conoce el pago extra, éste puede ser ubicado en cualquier momento con la tasa de interés y los factores de descuento o acumulación correspondientes.

Ejemplo 5.36 Un automóvil con valor de $130,000 se ofrece con un plan donde se paga un enganche de $45,000 hoy, y mensualidades de $7,300 a una tasa del 1.8% mensual.

a) Calcular el número de pagos.
b) Encontrar la cantidad extra que debe ser pagada al momento de realizar el último pago completo.
c) Encontrar la cantidad extra que debe ser pagada un mes después de hacer el último pago completo.
d) ¿Cuánto se debió dar de enganche para que no se tuviera que llevar a cabo ningún pago extra?

a) Como ya se dio un enganche de $45,000, sólo restan $85,000 que deberán ser cubiertos con las mensualidades de $7,300. El diagrama quedaría:



Planteando la ecuación para encontrar el número de pagos:

$$85,000 = (7,300)\left[\frac{1-(1.018)^{-n}}{0.018}\right]$$

Despejando "n"

$$\frac{(85,000)(0.018)}{7,300} = 0.2096 = 1-(1.018)^{-n}$$

Donde:

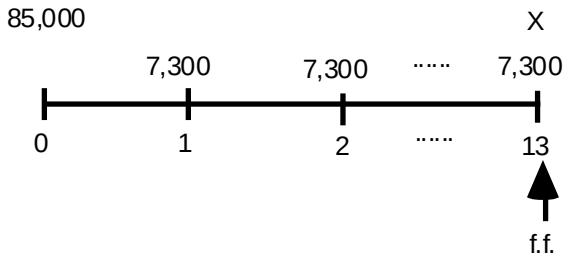
$$-n = \frac{\ln(0.7904)}{\ln(1.018)} = \frac{-0.2352}{0.0178} = -13.18$$

Finalmente:

$$n = 13.18$$

Se tienen que efectuar 13 pagos completos y un pago extra para liquidar exactamente el automóvil.

b) Sea "X" el pago extra a efectuarse al momento de realizar el último pago, entonces el gráfico quedaría:



Planteando la ecuación con fecha focal en 13:

$$85,000\ (1.018)^{13} = (7,300)\left[\frac{(1.018)^{13}-1}{0.018}\right] + X$$

Realizando las operaciones:

$$107,186.49 = 105,857.10 + X$$

Donde:

$$X = 1,329.39$$

Por lo tanto, el último pago (el pago del mes 13) sería mayor a los demás con un valor total de:

$$X = 7,300 + 1,329.39 = 8,629.39$$

c) Si se desea encontrar el valor del pago extra un mes después, basta con acumular un periodo el pago de $1,329.39, sin necesidad de volver a plantear una nueva ecuación.

$$X_{14} = X_{13}(1+i) = (1,329.39)(1.018) = 1,353.52$$

En este caso se hubieran tenido que realizar 13 pagos completos de $7,300 y un pago extra en el mes 14 de $1,353.32 para saldar el adeudo.

d) Si no se desea hacer pago extra y lo que se pretende es modificar el enganche, entonces hay que agregarle al enganche esta cantidad pero evaluada en "cero". El pago extra en 13 es de $1,329.39 por lo que este pago hay que regresarlo 13 meses:

$$X_0 = \frac{X_{13}}{(1+i)^{13}} = \frac{(1,329.39)}{(1.018)^{13}} = 1,054.22$$

El enganche hubiera tenido que ser de:

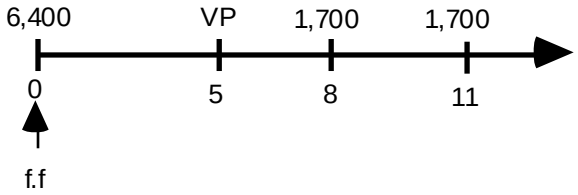
$$45,000 + 1,054.22 = 46,054.22$$

y sólo se hubieran tenido que efectuar 13 pagos completos de $7,300

Ejemplo 5.37 Un préstamo de $6,400 se acuerda pagarlo con pagos trimestrales de $1,700, siendo el primer pago a los 8 meses. Si la tasa cobrada es del 20% convertible trimestralmente:

a) calcular el número de pagos.
b) calcular el pago final mayor a los demás que cancela la deuda (el pago extra se realiza junto con el último pago de $1,700).

a) El diagrama quedaría como sigue:



Como el primer pago se efectúa en el mes 8, el valor presente se evalúa en el mes 5 por ser los pagos trimestrales. Como la tasa de interés efectiva trimestral que se cobra es del 5%, la ecuación quedaría:

$$6,400 = (1,700)\left[\frac{1-(1.05)^{-n}}{0.05}\right](1.05)^{-5/3}$$

El valor presente de la anualidad hay que regresarlo 5 meses, y teniendo una tasa trimestral entonces el tiempo es de $5/3$. Resolviendo algunas operaciones:

$$\frac{(6,400)(0.05)}{(1,700)(1.05)^{-5/3}} = 0.2042 = 1-(1.05)^{-n}$$

Donde:

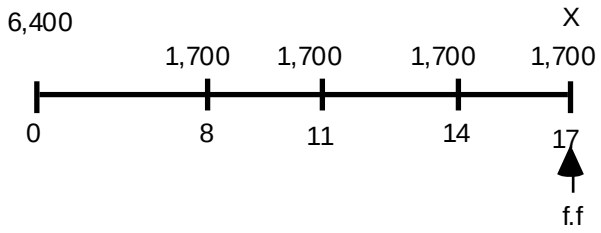
$$-n = \frac{\ln(0.7958)}{\ln(1.05)} = \frac{-0.2284}{0.0488} = -4.68$$

Finalmente:

$$n = 4.68$$

El número de pagos completos es de 4.

b) Para encontrar el pago extra obsérvese el siguiente diagrama.



Como son 4 pagos completos y el primero se hace a los 8 meses el último se realiza a los 17 meses. En este caso sí es importante saber donde se realiza el último pago, puesto que es precisamente donde se hará el pago extra. Recuérdese que la fecha focal se elige donde está la incógnita para facilitar operaciones algebraicas, pero es decisión de cada quien elegirla. La ecuación quedaría:

$$6,400\ (1.05)^{17/3} = (1,700)\left[\frac{(1.05)^4 - 1}{0.05}\right] + \mathrm{X}$$

Los \$6,400 hay que llevarlos al mes 17, y como se tiene una tasa trimestral entonces hay que acumularlos $17/3$ trimestres. Como el valor futuro de la anualidad evalúa directamente al momento de realizar el último pago, ya no hay que modificarlo; y el pago extra por estar en la fecha focal no hay que hacerle modificación alguna. Realizando las operaciones:

$$8,438.26 = 7,327.21 + \mathrm{X}$$

Donde:

$$\mathrm{X} = 1,111.04$$

Finalmente, el último pago mayor a los demás es:

$$1,700 + 1,111\ .04 = 2,811\ .04$$

5.9 La incógnita es la tasa de interés.

Antes de hablar acerca del método para encontrar la tasa de interés, es conveniente recordar el efecto que tiene ésta sobre el valor presente del dinero. Si se tienen $100 y se invierten a una tasa del 20%, al cabo de un año se tendrán $120; que dicho de otro modo, el valor presente de $120 a una tasa de interés del 20% son $100. ¿Qué sucede con el valor presente de $120 si la tasa ofrecida aumenta?, ¿será menor o mayor a los $100? Para este ejemplo, si la tasa aumentara se necesitarían menos de $100 para acumular los mismos $120 deseados, por lo que podemos afirmar: **entre mayor sea la tasa de interés, menor será el valor presente.**

En cambio, si la tasa de interés es menor al 20%, ahora se necesitará depositar una cantidad mayor a los $100 para acumular los $120; generalizando: **si la tasa de interés disminuye entonces el valor presente aumenta**.

Por otra parte, en una anualidad cuando la incógnita es la tasa de interés, por la forma que tiene la fórmula de anualidades, es prácticamente imposible despejar la tasa de interés, por lo que se ha ideado un método para encontrar un resultado aproximado de la tasa, que se conoce como interpolación lineal. Una fórmula que puede utilizarse para aproximarse al verdadero valor de la tasa de interés y que será de gran utilidad para la interpolación lineal es la siguiente:

$$\mathrm{i} \approx \frac{2\left(\mathrm{n} - \dfrac{\mathrm{VP}}{\mathrm{X}}\right)}{\dfrac{\mathrm{VP}}{\mathrm{X}}\left(\mathrm{n}+1\right)} \qquad \textbf{5.3}$$

Donde:

VP	:	valor presente de la anualidad o deuda.
n	:	número de pagos.
X	:	valor de cada pago.

El método de interpolación lineal y la utilización de la fórmula 5.3 se introducirán en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.38 Una deuda de $96,797 será liquidada con 12 pagos mensuales de $9,200, ¿cuál es la tasa mensual que se cobró?

Planteando la ecuación tenemos:

$$96,797 = (9,200)\left[\frac{1-(1+i)^{-12}}{i}\right]$$

Como se dijo, despejar la tasa de interés es casi imposible, por lo que se utilizará la interpolación lineal. Primeramente lo que se debe hacer es mediante "tanteo", acercarse a la tasa de interés que haga que el lado derecho de la ecuación tenga un valor de $96,797.

El tanteo consiste en irle dando valores a la tasa de interés, tal que logremos el objetivo. Para comenzar a darle valores a la tasa de interés se recomienda utilizar el resultado de la fórmula 5.3; que para este caso VP=96,797, n=12 y X=9,200.

Sustituyendo valores en dicha fórmula se tiene un primer valor para la tasa de interés:

$$i \approx \frac{2\left(n - \frac{VP}{X}\right)}{\frac{VP}{X}(n+1)} = \frac{2\left(12 - \frac{96,797}{9,200}\right)}{\frac{96,797}{9,200}(12+1)} = 0.02162$$

Si probamos con esta tasa de interés en la fórmula de valor presente se tiene:

$$(9,200)\left[\frac{1-(1+0.02161)^{-12}}{0.02162}\right] = 96,332.05$$

El valor obtenido con esa tasa es cercano pero menor a los $96,797. La tasa que buscamos debe dar exactamente la cantidad anterior; de aquí la pregunta: ¿la tasa "verdadera" debe ser menor o mayor al 2.162%? Al inicio de esta sección se hizo hincapié en que si la tasa de interés disminuía, el valor presente aumentaba. En este caso queremos precisamente que el valor presente de la anualidad aumente, (de $96,332 a $96,797) por lo que debemos proponer una tasa menor. Propongamos ahora una tasa del 2% (esta propuesta es particular a cada persona y no existe una regla para determinarla).

Con un 2% el valor presente de los pagos es:

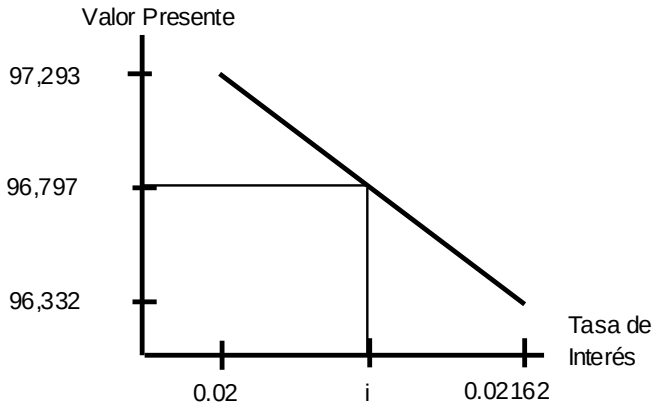
$$(9,200)\left[\frac{1-(1+0.02)^{-12}}{0.02}\right] = 97,293.14$$

Ahora, nuestro valor presente fue mayor que el deseado, por lo que la tasa de interés debería ser mayor al 2% pero menor a la del 2.162% encontrada anteriormente. Podríamos seguir dando valores para la tasa de interés, pero sería muy tardado encontrar la tasa exacta, por lo que en este punto se explicará la interpolación lineal.

Para la interpolación lineal es necesario primeramente encontrar dos tasas de interés que den resultados del valor presente arriba y abajo del objetivo. En

este caso ya se encontraron dichas tasas. El 2% da un valor presente superior, mientras que el 2.162% da un valor presente inferior a los $96,797. Si graficamos la información anterior tenemos:

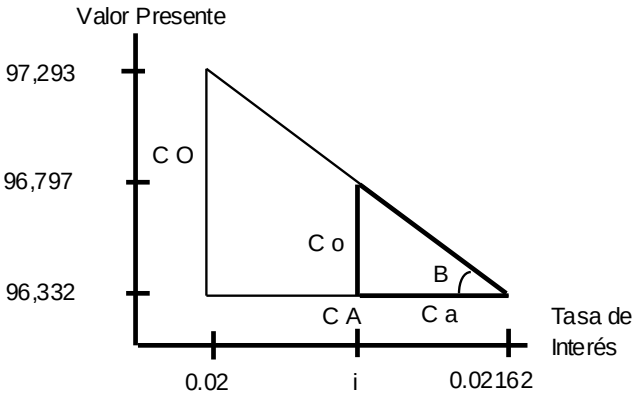
FIG 5.7



En la figura 5.7 graficamos los valores presentes correspondientes a las tasas del 2 y del 2.162%. El valor presente que buscamos se localiza entre estos valores. Si unimos los puntos con una línea recta como en la gráfica, entonces debe existir una tasa de interés "i" que produzca los $96,797. Cabe hacer notar que no necesariamente los puntos están unidos por una recta, por eso el método es una aproximación.

Podemos apreciar que a medida que la tasa de interés se hace más grande, el valor presente disminuye y viceversa. Con los puntos graficados podemos dibujar 2 triángulos. Véase la figura 5.8:

FIG 5.8



El triángulo más grande (con línea más delgada) está formado por los datos calculados originalmente, mientras que el más pequeño está formado por la tasa de interés mayor y la tasa de interés que buscamos. El ángulo B de ambos triángulos es el mismo, por lo que se dice que ambos triángulos son semejantes; esto significa que la relación de sus catetos debe ser la misma.

En la figura, Ca y Co representan el cateto adyacente y opuesto del triángulo pequeño con respecto al ángulo B, mientras que CA y CO representan el cateto adyacente y opuesto del triángulo grande. Por ser semejantes se cumple:

$$\frac{\text{Ca}}{\text{Co}} = \frac{\text{CA}}{\text{CO}}$$

El CA mide la diferencia entre 0.02162 y 0.02, CO mide la diferencia entre 97,293 y 96,332. Por otra parte Co mide la diferencia entre 96,797 y 96,332 mientras que Ca mide la diferencia entre 0.02162 e "i". De esta forma:

$$\frac{0.02162 - i}{96,797 - 96,332} = \frac{0.02162 - 0.02}{97,293 - 96,332}$$

La única incógnita es la tasa de interés, que es precisamente lo que queremos encontrar. Resolviendo:

$$\frac{0.02162 - \text{i}}{465} = \frac{0.00162}{961}$$

Donde:

$$0.02162 - i = \frac{(0.00162)(465)}{961} = 0.00078387$$

Finalmente:

$$i = 0.02162 - 0.00078387 = 0.020836$$

La tasa de interés que se cobró debe ser aproximadamente del 2.0836%. Para ratificar que el resultado es correcto se debe sustituir esta tasa en la fórmula de anualidad y ver que el valor presente sea muy cercano a los 96,797 deseados. Sustituyendo:

$$(9,200)\left[\frac{1-(1+0.020836)^{-12}}{0.020836}\right] = 96,795.48$$

Este resultado es muy cercano al deseado, por lo que podemos decir que la tasa que cobraron aproximadamente es del 2.0836%

Del ejemplo 5.38 podemos ver que **la interpolación lineal es un método que aproxima un resultado, en función de datos conocidos, utilizando una línea recta**. Los pasos a seguir en la interpolación lineal son:

1 Encontrar 2 tasas de interés tales que de sus valores presentes correspondientes, uno sea mayor y el otro menor que el valor presente deseado. Para tener un valor aproximado de la tasa de interés que se está buscando se aplica la ecuación 5.3.

2 Una vez encontrados dichos valores se grafican y se procede a construir los triángulos correspondientes como en la figura 5.8.

3 Sabiendo que los triángulos son semejantes la relación de catetos $\frac{Ca}{Co} = \frac{CA}{CO}$ se cumple, y se procede a sustituir los valores, donde la única incógnita es la tasa de interés.

4 Se despeja la tasa de interés.

5 Para verificar que el resultado es correcto, se sustituye la tasa de interés en la fórmula de anualidad, y el resultado debe ser muy cercano al deseado.

Ejemplo 5.39 Un préstamo de $37,076 será liquidado mediante 8 pagos anuales de $15,000, ¿cuál es la tasa anual que se cobró?

La tasa anual que se cobró es tal que se debe cumplir:

$$(15,000)\left[\frac{1-(1+i)^{-8}}{i}\right] = 37,076$$

Para saber cuál sería el posible valor de "i" aplicamos la ecuación 5.3

$$\mathrm{i} \approx \frac{2\left(\mathrm{n} - \frac{\mathrm{VP}}{\mathrm{X}}\right)}{\frac{\mathrm{VP}}{\mathrm{X}}(\mathrm{n}+1)}$$

Sustituyendo en esta fórmula se tiene el primer valor para i:

$$i \approx \frac{2\left(8 - \frac{37,076}{15,000}\right)}{\frac{37,076}{15,000}(8+1)} = 0.497021134$$

Sustituyendo esta tasa en la fórmula de anualidad:

$$(15,000)\left[\frac{1-(1+0.497)^{-8}}{0.497}\right]=28,983.36$$

En este caso el valor de la anualidad con la tasa del 49.7% quedó muy lejos del valor deseado, por lo que podemos pensar que la tasa "verdadera" no está muy cerca del 49.7%. El valor presente deseado es de $37,076 por lo que debemos bajar, la tasa para aumentar el valor presente. Probando con un 40% se tiene:

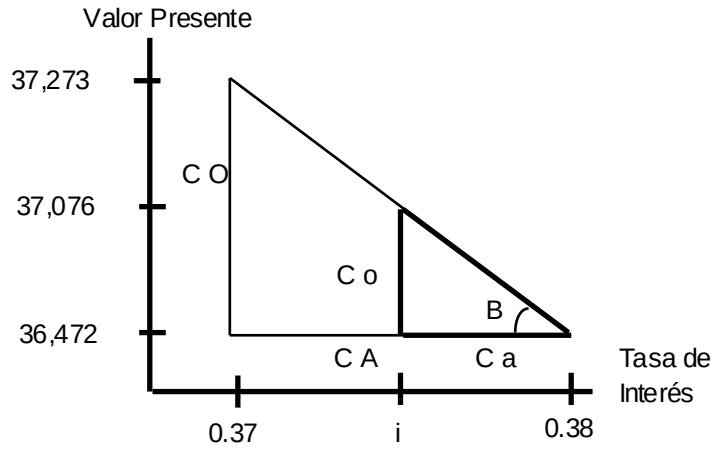
$$(15,000)\left[\frac{1-(1+0.40)^{-8}}{0.40}\right]=34,958.99$$

En este caso el valor presente todavía quedó por debajo del deseado por lo que debemos bajar un poco más la tasa. Probando con algunas tasas se tienen los siguientes resultados:

Tasa de interés	Valor presente
40.0%	$34,958.99
39.0%	$35,701.54
38.0%	**$36,472.62**
37.0%	**$37,273.72**

El valor deseado es de $37,076 por lo que ya se encontraron 2 tasas que ofrecen un valor por encima y otro por debajo del valor presente buscado.

Para que la interpolación lineal de un resultado muy cercano, la diferencia que exista entre las tasas de interés debe ser pequeña (un punto porcentual como máximo), por eso es que los valores que se escogen son los del 38% y 37%.



Utilizando la relación de catetos:

$$\frac{\text{Ca}}{\text{Co}} = \frac{\text{CA}}{\text{CO}}$$

Sustituyendo:

$$\frac{0.38 - \text{i}}{37,076 - 36,472} = \frac{0.38 - 0.37}{37,273 - 36,472}$$

Resolviendo:

$$\frac{0.38 - i}{604} = \frac{0.01}{801}$$

Donde:

$$\text{i} = 0.38 - 0.00754 = 0.37247$$

Para corroborar el resultado se sustituye esta tasa en la fórmula de anualidad:

$$(15,000)\left[\frac{1-(1+0.37247)^{-8}}{0.37247}\right] = 37,073.12$$

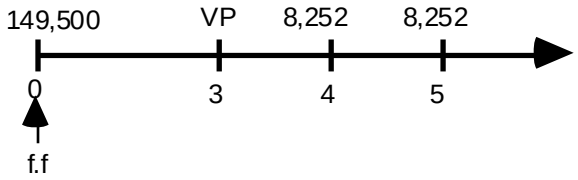
El valor ya es muy cercano por lo que podemos concluir que la tasa de interés anual que se cobró es aproximadamente del 37.25%.

Ejemplo 5.40 Un automóvil cuyo valor de contado es de $230,000 se ofrece con un 35% de enganche y 24 mensualidades de $8,252. Siendo el primer pago mensual a los 4 meses, ¿cuál es la tasa efectiva anual que se está aplicando?

Si se da un enganche del 35% se paga:

$$(230,000)(0.35) = 80,500$$

y se quedan a deber únicamente $149,500 del automóvil. La gráfica sería:



Ahora bien, como los pagos son mensuales, la tasa que se maneja en la anualidad debe ser mensual, por lo que al final debe ser convertida a una anual. La tasa mensual debe satisfacer:

$$(149,500) = (8,252)\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-24}}{\mathrm{i}}\right](1+\mathrm{i})^{-3}$$

Utilizando la ecuación 5.3 para determinar el primer valor de la tasa de interés:

$$\mathrm{i} \approx \frac{2\left(\mathrm{n}-\frac{\mathrm{VP}}{\mathrm{X}}\right)}{\frac{\mathrm{VP}}{\mathrm{X}}(\mathrm{n}+1)}$$

De aquí que:

$$\mathrm{i} \approx \frac{2\left(24-\frac{149,500}{8,252}\right)}{\frac{149,500}{8,252}(24+1)} = 0.02598$$

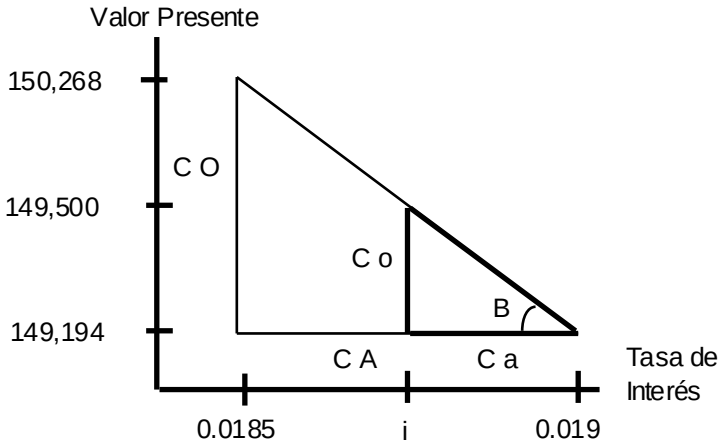
Sustituyendo esta tasa en la fórmula de anualidad:

$$(8,252)\left[\frac{1-(1+0.02598)^{-24}}{0.02598}\right](1.02598)^{-3} = 135,190.97$$

El valor quedó realmente lejos del buscado. Para incrementar este valor presente debemos disminuir la tasa de interés. Suponiendo las siguientes tasas:

Tasa de interés	Valor presente
2.598%	$135,182
2.000%	$147,076
1.950%	$148,130
1.900%	**$149,194**
1.850%	**$150,268**

Los valores en negrillas ya están uno por arriba y el otro por debajo del valor presente buscado. Graficando:



Se debe cumplir:

$$\frac{\text{Ca}}{\text{Co}} = \frac{\text{CA}}{\text{CO}}$$

Sustituyendo:

$$\frac{0.019 - \text{i}}{149,500 - 149,194} = \frac{0.019 - 0.0185}{150,268 - 149,194}$$

Donde:

$$i = 0.019 - 0.00014246 = 0.0188558$$

Corroborando que esta tasa produzca resultado deseado:

$$(8,252)\left[\frac{1-(1.018858)^{-24}}{0.018858}\right](1.018858)^{-3} = 149,497.64$$

Este valor ya es muy cercano a los $149,500, por lo tanto, la tasa que se cobró aproximadamente es del 1.8858% mensual. Como la tasa que se pide es efectiva anual hay que convertirla:

$$(1.018858)^{12} = (1 + i_a)$$

Despejando la tasa anual:

$$i_a = 0.2513$$

La tasa efectiva anual que se cobró aproximadamente es del 25.13%.

Hasta ahora se han resuelto problemas donde la incógnita es la tasa de interés para valores presentes. Para el caso de valores futuros sólo hay que considerar unos pequeños cambios, pero en esencia el método se mantiene.

Hay que realizar dos consideraciones importantes en este momento: **a medida que la tasa de interés aumenta, el valor futuro de una anualidad también crece**; esto es porque al crecer la tasa de interés, los depósitos realizados generarán más dinero por concepto de intereses, y por ende el valor futuro será mayor. Lo contrario también es cierto, **a medida que la tasa de interés disminuye, el valor futuro también decrece**.

La fórmula 5.3 que se aplicaba para obtener la primera tasa de interés, ya no es válida para valor futuro, y se debe utilizar la siguiente fórmula:

$$i \approx \frac{2\left(\frac{VF}{X} - n\right)}{\frac{VF}{X}(n+1)} \qquad \textbf{5.4}$$

Donde:

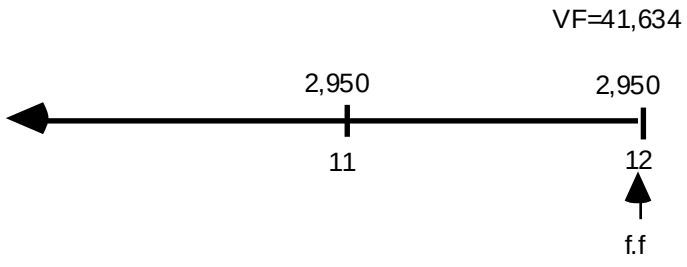
VF	:	valor futuro de la anualidad.
n	:	número de pagos.
X	:	valor de cada depósito.

Finalmente, otra de las diferencias es que la gráfica ahora será creciente, por la relación entre el valor futuro y la tasa de interés.

Para apreciar más claramente las diferencias véase el ejemplo 5.41.

Ejemplo 5.41 Se realizarán depósitos trimestrales vencidos de $2,950 durante 3 años. Si al finalizar los 3 años se tendrán $41,634, ¿cuál es la tasa convertible trimestralmente que se ofrece?

El diagrama de tiempo es:



Como los depósitos son trimestrales, en 3 años se harán un total de 12. Como el valor futuro de una anualidad vencida "cae" directamente sobre el último pago, sólo basta con aplicar la fórmula de valor futuro, y la tasa que se obtenga será efectiva trimestral, por la forma de los pagos. La ecuación es:

$$(2,950)\left[\frac{(1+\mathrm{i})^{12}-1}{\mathrm{i}}\right]=41,634$$

Hay que encontrar la tasa de interés que satisfaga la ecuación anterior; para esto se utilizará la fórmula 5.4.

$$\mathrm{i}\approx\frac{2\left(\frac{\mathrm{VF}}{\mathrm{X}}-\mathrm{n}\right)}{\frac{\mathrm{VF}}{\mathrm{X}}(\mathrm{n}+1)}$$

De aquí que:

$$\mathrm{i}\approx\frac{2\left(\frac{41,634}{2,950}-12\right)}{\frac{41,634}{2,950}(12+1)}=0.023035906$$

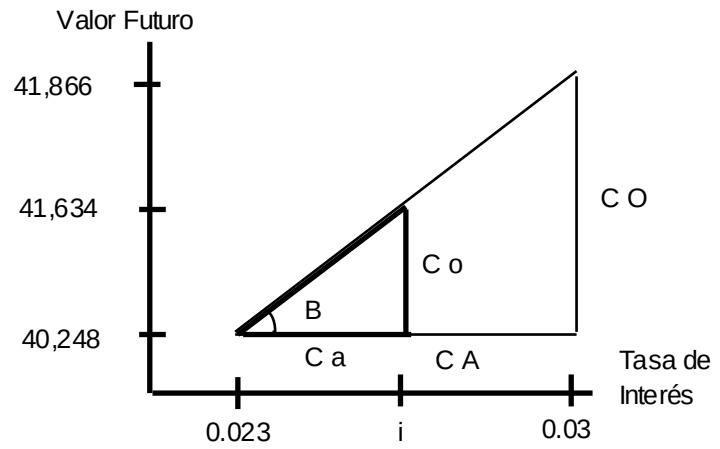
Sustituyendo esta tasa en la fórmula de valor futuro:

$$(2,950)\left[\frac{(1.023)^{12}-1}{0.023}\right]=40,248.01$$

La tasa debe aumentar para incrementar el valor futuro. Proponiendo una tasa del 3% se tiene:

$$(2,950)\left[\frac{(1.03)^{12}-1}{0.03}\right]=41,866.49$$

El valor futuro objetivo ya se encuentra entre los valores obtenidos, por lo que graficando:



Esta gráfica está invertida con respecto a la de valor presente, esto es porque a medida que la tasa de interés crece, el valor futuro aumenta y viceversa. Nuevamente los puntos encontrados se unen mediante una línea recta y se construyen los 2 triángulos: el más grande con los valores obtenidos, y el más pequeño con la tasa más baja y con la tasa "i" que se desea encontrar. Como estos 2 triángulos son semejantes se cumple que:

$$\frac{Ca}{Co} = \frac{CA}{CO}$$

Sustituyendo:

$$\frac{i - 0.023}{41,634 - 40,248.01} = \frac{0.03 - 0.023}{41,866.49 - 40,248.01}$$

Donde:

$$i = 0.023 + 0.006 = 0.029$$

Para corroborar que ésta es la tasa buscada:

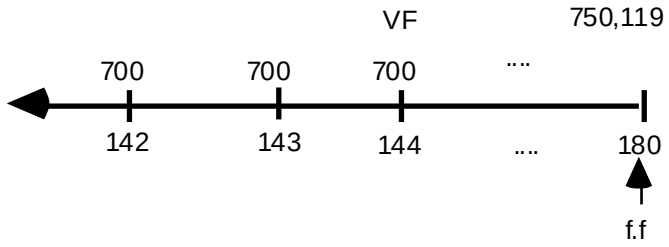
$$(2,950)\left[\frac{(1.029)^{12} - 1}{0.029}\right] = 41,629.35$$

Como esta cantidad es muy cercana a la buscada, la tasa trimestral que se ofrece es aproximadamente del 2.9%. Para calcular la tasa anual convertible trimestralmente se multiplica por 4, dando por resultado un 11.6%.

Ejemplo 5.42 Un trabajador pensando en su retiro, comenzó a realizar depósitos de $700 mensuales hace 15 años. De esos 15 años sólo en los primeros 12 años realizó depósitos, pero dejó su dinero para que en los 3 años restantes generara intereses. Si el día de hoy retiró la suma de $750,119.55, ¿cuál fue el rendimiento anual que obtuvo por su dinero?

En total el trabajador realizó 144 depósitos (12 depósitos por año, por 12 años), y dejó su dinero 3 años más. Si utilizamos una tasa mensual, su dinero generó intereses 36 meses más sin realizar depósito alguno.

El diagrama correspondiente es:



El último depósito se realiza a los 144 meses y todavía se esperan 36 meses más para retirarlos (el retiro se lleva a cabo a los 15 años que equivalen a 180 meses). La ecuación sería:

$$(700)\left[\frac{(1+i)^{144}-1}{i}\right](1+i)^{36} = 750,119.55$$

Para encontrar la tasa de interés se utilizará la fórmula 5.4 para darnos una idea de su valor:

$$i \approx \frac{2\left(\frac{VF}{X} - n\right)}{\frac{VF}{X}(n+1)}$$

Susituyendo:

$$i \approx \frac{2\left(\frac{750,119.55}{700} - 144\right)}{\frac{750,119.55}{700}(144+1)} = 0.0119$$

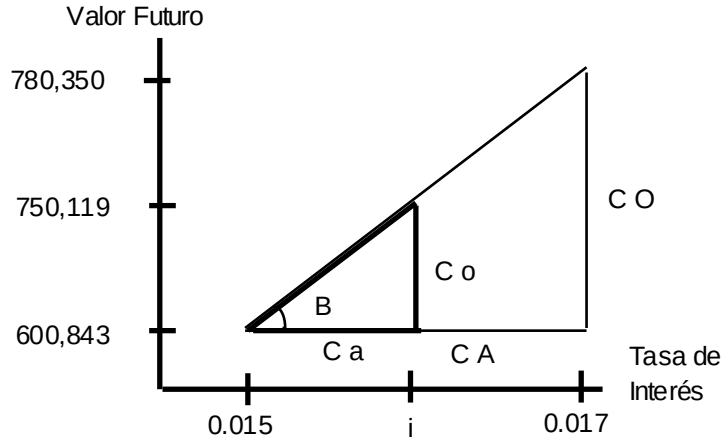
Sustituyendo esta tasa en la fórmula de valor futuro:

$$(700)\left[\frac{(1.0119)^{144}-1}{0.0119}\right](1.0119)^{36} = 406,635.8$$

Como se desea que el valor futuro sea mayor a los $406,635.8 la tasa de interés debe aumentar. Probando con diferentes tasas se tiene:

Tasa de interés	Valor futuro
1.19%	$406,635
1.50%	**$600,843**
1.70%	**$780,350**

Tomando los datos en negrillas podemos graficar:



Con la relación de catetos:

$$\frac{Ca}{Co} = \frac{CA}{CO}$$

sustituyendo:

$$\frac{i - 0.015}{750,119.55 - 600,843.98} = \frac{0.017 - 0.015}{780,350.71 - 600,843.98}$$

despejando la tasa de interés:

$$i = 0.015 + 0.00166 = 0.01667$$

sustituyendo esta tasa en la ecuación de valor futuro:

$$(700)\left[\frac{(1.01667)^{144} - 1}{0.01667}\right](1.01667)^{36} = 746,495.67$$

La tasa aproximadamente es la correcta por lo que anualizándola (nos piden una tasa anual):

$$(1.01667)^{12} = (1 + i_a)$$

Despejando la tasa anual:

$$i_a = 0.2193$$

La tasa efectiva anual que se obtuvo aproximadamente fue del 21.93%.

5.10 Perpetuidades.

Una perpetuidad es un caso especial de una anualidad, donde se realizan un infinito número de pagos. Aunque en la práctica rara vez se encuentran este tipo de esquemas de pago, existen modelos para determinar el precio de acciones en función de perpetuidades.

Los supuestos de que los pagos son constantes, la tasa de interés debe tener la misma capitalización que los pagos, y que los pagos tienen todos la misma periodicidad, se mantienen.

Como sabemos, el valor presente de una anualidad se puede calcular de la siguiente forma:

$$VP = X\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

El valor presente de una perpetuidad es similar al de una anualidad, con la diferencia que el número de pagos es infinito (para siempre). La fórmula de valor presente también se puede escribir de la siguiente forma:

$$VP = X\ \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

En esta última ecuación ¿qué sucede si n empieza a crecer? Como la tasa de interés "i" es positiva, entonces conforme "n" va aumentando el valor de $(1+i)^n$ también lo hace. Si "n" fuera demasiado grande, digamos infinito, el factor $(1+i)^n$ también sería infinito, y entonces: $\frac{1}{(1+i)^n}$ tendería a ser cero. De esta forma el valor presente de una perpetuidad estaría dado por:

$$\mathrm{VPP} = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{i}} \qquad \textbf{5.5}$$

Donde:

VPP	:	valor presente de un infinito número de pagos, evaluados un periodo antes del primero.
X	:	valor de cada uno de los pagos.
i	:	tasa efectiva de interés por periodo de pago.

La fórmula de valor presente de una perpetuidad, al igual que la de anualidad, evalúa un periodo antes del primer pago.

Ejemplo 5.43 A una persona se le han prometido pagar $1,000 mensuales de por vida considerando una tasa del 24% anual. Esta persona preferiría recibir un pago único hoy en vez de toda la serie de pagos. ¿De cuánto debería ser dicho pago?

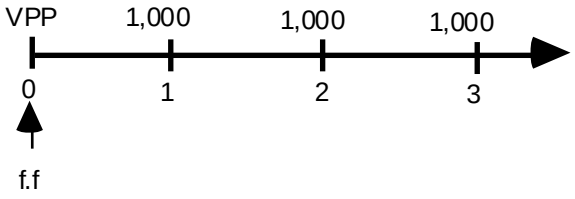
Al no especificarse cuándo se hace el primer pago se asume vencido, como anteriormente se había acordado. Los pagos siendo mensuales deben tener una tasa mensual. Convirtiendo la tasa anual del 24%:

$$(1+i_m)^{12} = (1.24)$$

Donde:

$$i_m = (1.24)^{1/12} - 1 = 0.018$$

Analizando el diagrama de tiempo, podemos ver que el primer pago se efectúa al mes, por lo que el valor presente de la perpetuidad (VPP), está evaluado precisamente hoy.



Como ya se tiene la tasa mensual se puede aplicar la ecuación 5.5:

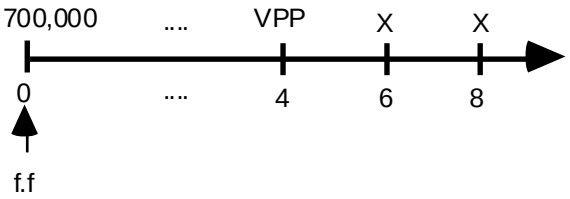
$$\text{VPP} = \frac{\text{X}}{\text{i}} = \frac{1,000}{0.018} = 55,286.55$$

Recibir $55,286.55 el día de hoy, ó recibir $1,000 de manera mensual de por vida, a una tasa de interés del 24% anual, tienen el mismo valor.

En el caso de que los pagos no sean vencidos, entonces como hasta ahora hemos hecho, debemos de llevar a la fecha focal correspondiente el valor presente de la perpetuidad.

Ejemplo 5.44 Una deuda de $700,000 se pagará como una perpetuidad de forma bimestral, a una tasa del 2.5% bimestral. Calcular el valor de los pagos si el primero de ellos se lleva a cabo a los 6 meses.

Primero hagamos el diagrama:



En el diagrama, el tiempo se representa en meses. El valor presente de la perpetuidad estaría evaluado en el mes 4, por ser los pagos bimestrales. La ecuación quedaría:

$$700,000 = \text{VPP}\,(1+\text{i})^{-2}$$

El VPP se regresa sólo dos periodos porque la tasa está bimestral. Sustituyendo:

$$700,000 = \frac{\text{X}}{0.025}(1.025)^{-2}$$

Despejando:

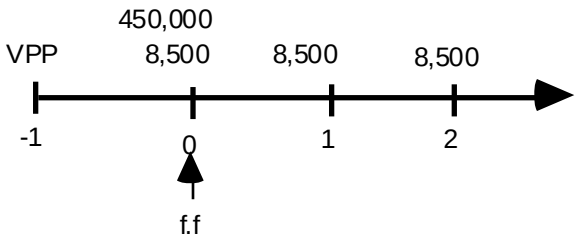
$$\frac{(700,000)(0.025)}{(1.025)^{-2}} = \text{X}$$

de donde se obtiene el pago bimestral:

$$\text{X} = 18,385.94$$

Ejemplo 5.45 Una persona deja como herencia a su hijo la cantidad de $450,000 depositado en un fondo. El hijo podrá realizar retiros del fondo de manera perpetua a partir de este momento, a razón de $8,500 mensuales, ¿qué tasa de interés mensual le ofrece el fondo?

El diagrama estaría dado por:



El valor presente de la perpetuidad se evalúa en -1 por ser el primer pago en "cero". La ecuación quedaría:

$$450,000 = \text{VPP}\,(1+\text{i})$$

Sustituyendo:

$$450,000 = \frac{8,500}{\text{i}}(1+\text{i})$$

Despejando:

$$\frac{(450,000)(\text{i})}{8,500} = (1+\text{i})$$

que equivale:

$$52.94\,\text{i} = 1+\text{i}$$

Finalmente:

$$\text{i} = \frac{1}{51.94} = 0.01925$$

La tasa mensual que ofrece el fondo es del 1.925%

En una perpetuidad por ser los pagos infinitos, si se quisiera obtener el valor futuro, este valor sería incontable (extremadamente grande), por la acumulación de pagos y de intereses. Además, no tiene sentido hablar de un valor futuro ya que éste nunca se recibiría, puesto que los pagos son infinitos.

Para terminar el tema de perpetuidades, es importante aclarar, el por qué en una perpetuidad nunca se dejan de realizar pagos. Supóngase que se prestan 1,000 a una tasa anual del 20%, a pagarse como una perpetuidad. Asumiendo que el

primer pago se hace al año se tendría para calcular los pagos la siguiente ecuación:

$$1,000 = \frac{X}{0.020}$$

Por lo que el valor de los pagos es de $200. Entonces, por un préstamo de $1,000 se tienen que pagar $200 anuales de por vida a una tasa del 20% anual.

Vamos a analizar por qué nunca se dejan de hacer pagos (ver tabla 5.1). Si te prestan $1,000 a una tasa del 20% anual, al año tú debes de pagar los $1,000 más los intereses que en este caso son de $200 (el 20% de $1,000), dando un adeudo inicial de $1,200. Si nada más pagas los $200, quedas a deber finalmente los mismos $1,000. Para el segundo año te cobran intereses del 20% por los $1,000 que sigue siendo tu adeudo. Como vuelves a pagar $200 sólo cubres los intereses, y así sucesivamente año con año.

TABLA 5.1

	Año 0	**Año 1**	**Año 2**
Intereses	$0	$200	$200
Adeudo inicial	$1,000	$1,200	$1,200
Pago	$0	$200	$200
Adeudo final	$1,000	$1,000	$1,000

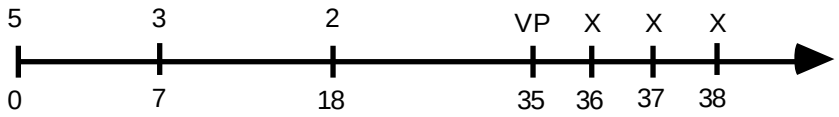
Resumiendo: **una perpetuidad nunca se deja de pagar, porque los pagos que se hacen sólo cubren los intereses, y el capital inicial se mantiene constante durante todo el crédito.**

5.11 Problemas varios

En esta sección se resolverán casos más generales, con la finalidad de reforzar todos los conceptos adquiridos durante el presente capítulo.

Ejemplo 5.46 Para poner en marcha un hotel se decide pedir un préstamo. Como no todo el dinero se necesita en este instante, porque la construcción se estima que tardará 2 años, se acuerda que el préstamo se distribuirá de la siguiente forma: 5 millones de pesos hoy, 3 millones a los 7 meses y 2 millones a los 18 meses. Se cobrará una tasa mensual del 1.5% y los pagos serán mensuales durante 10 años (120 pagos). Si el primer pago se efectuará a los 3 años, ¿cuál debe ser el valor de cada pago?

En este caso los 120 pagos mensuales deben liquidar el total de los 3 préstamos. Recordando que en una ecuación de valor lo que se presta debe ser igual a lo que se paga, considerando el valor del tiempo, hay que tener cuidado en su planteamiento. Apoyándonos en un diagrama de tiempo:



El tiempo está manejado en meses. El primer pago se hace a los 36 meses y el valor presente se evalúa en el mes 35. Las cantidades están expresadas en millones de pesos. Planteando la ecuación:

$$5+\frac{3}{(1.015)^{7}}+\frac{2}{(1.015)^{18}}=\mathrm{X}\left[\frac{1-(1+0.015)^{-120}}{0.015}\right](1.015)^{-35}$$

Los tres préstamos hay que llevarlos a la fecha focal, y éstos deben ser iguales a los 120 pagos mensuales evaluados en la misma fecha focal. Realizando operaciones:

$$9.2329=\mathrm{X}\,(55.4984)(0.5939)$$

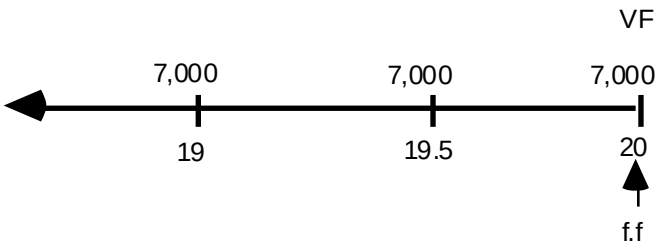
El pago mensual que se debe hacer es:

$$\mathrm{X}=0.28013598$$

Como las cantidades están en millones de pesos, se multiplica por 1,000,000 y se tiene que cada pago mensual debe ser de $280,135.98

Ejemplo 5.47 Una persona, pensando en su retiro, se dispone a realizar depósitos semestrales de $7,000 durante 20 años, comenzando el próximo semestre. A los 20 años, una vez terminados los depósitos, piensa hacer retiros mensuales durante 10 años con lo que haya logrado acumular. Si le ofrecen una tasa del 15% semestral, ¿cuál sería el valor de sus retiros?

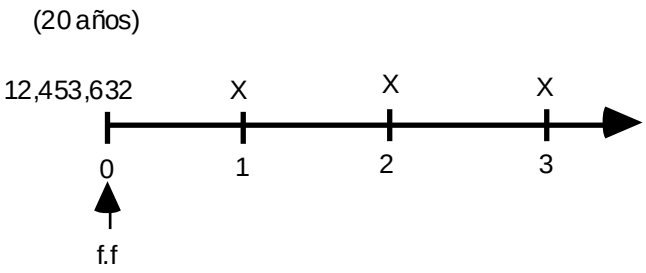
En este caso están de por medio dos anualidades: con lo que se junte de la primera, se podrán calcular los retiros de la segunda. Para calcular lo que la persona acumulará al cabo de los 20 años vemos el diagrama de tiempo:



En el diagrama, el tiempo está expresado en años, y como los depósitos son semestrales, el penúltimo se hace a los 19.5 años. El número de depósitos acumulados en 20 años es de 40. Calculando el valor futuro:

$$VF = 7,000\left[\frac{(1.15)^{40}-1}{0.15}\right] = 12'453,632.2$$

Con esta cantidad, la persona va a poder hacer retiros mensuales durante 10 años. Asumiendo que el primer retiro lo llevará a cabo al mes de haber acumulado su dinero, tendríamos el siguiente diagrama:



Aunque en el diagrama el tiempo se considera en meses, la fecha focal está a los 20 años, que es cuando se acumula la cantidad indicada.

Como los retiros son mensuales, la tasa debe ser mensual también, por tanto:

$$(1+i_m)^6 = (1.15)$$

Donde:

$$i_m = (1.15)^{1/6} - 1 = 0.0236$$

Planteando la ecuación:

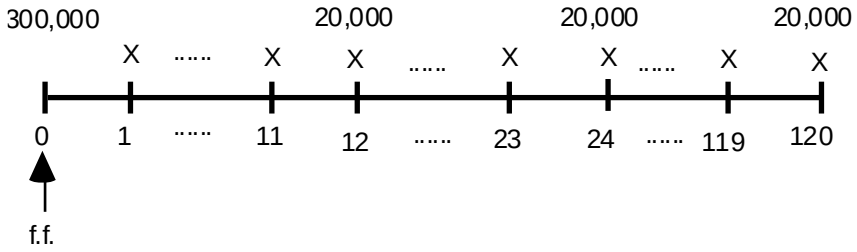
$$12,453,632.2 = X\left[\frac{1-(1.0236)^{-120}}{0.0236}\right]$$

Despejando el retiro mensual:

$$X = 312,595.32$$

Ejemplo 5.48 Para comprar una casa con valor de 500,000 se dará un enganche del 40% y el resto será financiado con un interés del 24% convertible mensualmente. La persona que pide el financiamiento hará pagos mensuales durante 10 años y además realizará 10 pagos anuales de $20,000 aprovechando el pago de su aguinaldo. Calcular el valor de los pagos mensuales si se asume que el primer pago anual se realiza justo con el doceavo pago mensual.

La gráfica podría quedar de la siguiente forma:



El tiempo se representa en meses, por lo que al hacer pagos mensuales durante 10 años, se realizan en total 120 pagos. Los pagos anuales se realizan a los 12 meses, 24 meses y así sucesivamente hasta el mes 120. Los pagos entonces se pueden ver como dos anualidades separadas, una anualidad de 120 pagos mensuales de X, y otra de 10 pagos anuales de $20,000. Todos estos pagos deben ser igualados a la deuda de $300,000, ya que se hizo el enganche del 40% que equivale a $200,000.

Para la anualidad de pagos mensuales, la tasa mensual sería:

$$i_m = \frac{0.24}{12} = 0.02$$

Para la anualidad de pagos anuales la tasa sería:

$$i_a = (1.02)^{12} - 1 = 0.2682$$

Planteando la ecuación:

$$300,000 = X\left[\frac{1-(1.02)^{-120}}{0.02}\right] + 20,000\left[\frac{1-(1.2682)^{-10}}{0.2682}\right]$$

Resolviendo:

$$300,000 = X(45.3553) + 67,633.59$$

Por lo tanto, los pagos mensuales serían de:

$$X = 5,123.24$$

Ejemplo 5.49 En el ejemplo anterior se calcularon pagos mensuales de $5,123.24 durante 10 años. Calcular el valor real de los pagos mensuales y de los pagos anuales realizados en los años 5 y 10, si se supone una inflación del 15% anual.

El objetivo de este ejercicio es identificar la manera de como el dinero pierde valor en el tiempo. En principio, $5,123.24 mensuales es una cantidad considerable, que para poderse pagar se debería tener un buen salario. El problema de un esquema de este tipo en donde las mensualidades son constantes, es que los $5,123.24 van a valer menos en términos reales a los 5 y 10 años, lo que significa que a la persona le costará más trabajo pagar en un principio que al final.

Para calcular el valor real del pago mensual y anual a los 5 años, se necesita quitarles la inflación durante ese periodo. Para el pago mensual:

$$\frac{5,123.24}{(1.15)^5} = 2,547.15$$

y el valor real de los $20,000 sería:

$$\frac{20,000}{(1.15)^5} = 9,943.53$$

Esto significa que el pago mensual de $5,123.24 y el pago anual de $20,000 a los cinco años, es como si se realizaran pagos de $2,547.15 y $9,943.53 a pesos de hoy..

Para los 10 años se tendrían:

$$\frac{5,123.24}{(1.15)^{10}} = 1,266.38$$

y :

$$\frac{20,000}{(1.15)^{10}} = 4,943.69$$

Podemos observar que los pagos pierden mucho valor real conforme transcurre el tiempo. El pago de $20,000 a los 10 años es como si se hiciera un pago de $4,943.69 el día de hoy.

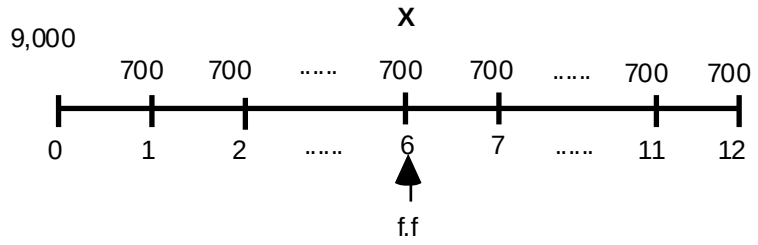
El problema entonces de las anualidades con pagos constantes es que aunque nominalmente se paga lo mismo, en términos reales se cobra más al principio, que al final, por lo que al prestatario se le "castiga" más al inicio que al final.

Ejemplo 5.50 Una deuda de $9,000 se pagará con 12 pagos mensuales vencidos de $700 y un pago extra a los 6 meses, a partir de hoy, cobrando una tasa anual del 21.3%. Encontrar el valor del pago a los 6 meses.

Como los pagos son mensuales, primeramente se calculará la tasa mensual:

$$i_m = (1.213)^{1/12} - 1 = 0.01622$$

La deuda será pagada mediante una anualidad y un pago, por lo que la suma de ambos, considerando el valor del dinero en el tiempo, debe cancelar la deuda. El diagrama quedaría:



La fecha focal se eligió en el mes 6 porque ahí tenemos la incógnita. Planteando la ecuación de valor tenemos:

$$9,000(1.01622)^{6} = 700\left[\frac{1-(1.01622)^{-12}}{0.01622}\right](1.01622)^{6} + X$$

Los $9,000 deben ser llevados 6 meses a valor futuro. Esta cantidad debe ser igual a la anualidad, que como el primer pago se hace en 1, el valor presente estaría evaluado en cero. Por lo tanto hay que acumular este valor presente también 6 meses. Para terminar, el pago semestral de X debe ser sumado a la anualidad; y como ya está sobre la fecha focal, no hay que hacerle modificación alguna. Haciendo algunas operaciones:

$$9,912.27 = 700\,(10.82)(1.101) + X$$

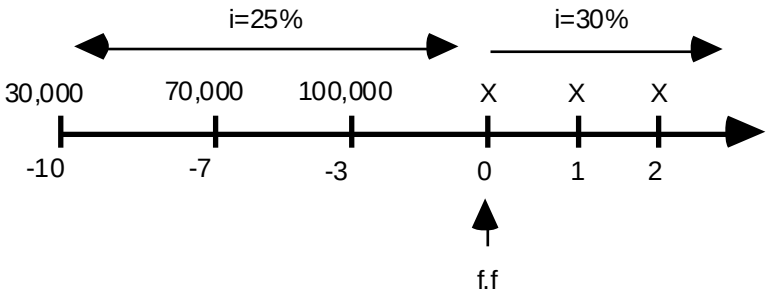
Calculando el pago semestral:

$$X = 1,566\ .72$$

Por lo tanto, en el mes 6 se tendría que hacer un pago total de $2,266.72, que resulta de la suma del pago mensual y del semestral (ambos se realizan juntos).

Ejemplo 5.51. Un trabajador ha depositado $30,000 hace 10 años, $70,000 hace 7 años y $100,000 hace 3 años. Con lo que ahorró más sus intereses, a partir de hoy comenzará a hacer retiros anuales de forma perpetua. La tasa que le ofreció el banco al invertir su dinero fue del 25% anual. La tasa que le ofrece el banco a partir de hoy que comenzará a realizar retiros es del 30%. Calcular el valor de los retiros anuales.

En este caso existen 2 tasas de interés: la del 25% que opera de hace 10 años hasta hoy, y la del 30% que operará de hoy en adelante. El diagrama quedaría como sigue:



En el diagrama se muestran los 3 depósitos realizados en el pasado, con la tasa del 25%. Con lo acumulado el día de hoy (fecha focal en cero) se podrán hacer los retiros anuales de X. El valor de los depósitos hoy con la tasa del 25% sería: (se plantea quitándole 3 ceros a las cantidades)

$$30(1.25)^{10} + 70(1.25)^{7} + 100(1.25)^{3} = 808.49528$$

Como se les quitó 3 ceros a las cantidades depositadas, el valor acumulado al día de hoy es de $808,495.28. Esta cantidad debe ser igual a los retiros perpetuos. Recordando la fórmula de perpetuidad y que evalúa un periodo antes del primer pago se tiene:

$$808,495.28 = \frac{X}{i}(1+i) = \frac{X}{0.30}(1.30)$$

La perpetuidad evalúa un periodo antes del primer pago, por lo que estaría en -1. Como la fecha focal está en cero hay que acumularlo un periodo. Se utiliza la tasa del 30% anual. Despejando:

$$X = 186,575.83$$

Esta persona tiene derecho a recibir $186,575.83 de forma anual para siempre, por los depósitos realizados en el pasado.

CASO DE ESTUDIO

Los pagos “chiquitos”, una buena estrategia para cobrar una tasa de interés alta.

El objetivo de este apartado es analizar los esquemas de pagos chiquitos para ver que tan caros o baratos son. En lo personal estoy a favor de este tipo de planes, ya que de no existir, muchas personas no contarían con el dinero para poderse comprar de contado ciertos artículos, o bien no cuentan con una tarjeta de crédito.

Situémonos por un momento del lado de la empresa que va a financiar un par de tenis que cuestan $240. Queremos ofrecer este artículo con 50 pagos semanales, la pregunta es ¿cuál es el costo de la mensualidad que deberíamos fijar, para que nuestros clientes a la vez que se sientan contentos con su compra, a nosotros nos den un buen rendimiento?

Para contestar esta pregunta, vamos a jugar un poco con algunas cantidades. En principio, si no quisiéramos cobrar intereses, el pago debería ser de:

$$\text{pago} = \frac{240}{50} = 4.80$$

El pago de $4.80 no carga una tasa de interés. Obviamente, queremos tener una utilidad financiera, por lo que el pago debería ser mayor a los $4.80. Supongamos que aumentamos el pago a $5.50, ¿a nuestros clientes les parecería caro el pago? ¿qué tasa de interés les estaríamos cobrando?

Si nos ponemos a pensar, un pago de $5.50 semanal es inferior a lo que paga una persona en un día por transportarse en camión de ida y vuelta a su casa, y por dicha cantidad podrá estrenar un par de tenis. Comúnmente, una persona podría calcular la cantidad total que va a pagar, que en este caso es:

$$\text{total} = (5.50)(50) = 275$$

Por lo que de intereses terminará pagando $35. El porcentaje o tasa de interés que piensa va a pagar se podría obtener de:

$$\frac{35}{240} = 0.1458$$

Lo que representa una tasa del 14.58% por lo que en principio se pudiera pensar que el crédito es barato. Desafortunadamente, este cálculo no es correcto ya que no contempla el valor del dinero en el tiempo. Las cantidades simplemente se sumaron, sin considerar el momento en que se efectuaron los pagos, además, si los pagos son semanales, la tasa del 14.58% ¿es también semanal?, ¿o bien es de 50 semanas? Nótese que hay pagos desde la semana 1 hasta la semana 50. La manera correcta de resolver este caso es plantearlo como una anualidad de 50 pagos y resolver para la tasa de interés:

$$240 = 5.50\left[\frac{1-(1+i)^{-50}}{i}\right]$$

Interpolando, la tasa de interés que se obtiene es del 0.55% semanal, puesto que los pagos son semanales. Dicha tasa se traduce en una tasa anual de:

$$i_a = (1.0055)^{52} - 1 = 32.83\%$$

La tasa, como se puede apreciar, ya es considerable y significativamente mayor a la calculada con la suma de los pagos. Ahora bien, si asumimos que el pago es bajo y queremos aumentarlo, entonces queremos ver que tanto debemos incrementarlo para obtener una tasa mayor. En la tabla que se muestra a continuación se proponen algunos pagos y se muestran las tasas semanales y anuales que corresponden a esos pagos, asumiendo que la deuda se mantiene en $240.

Pago semanal	Tasa semanal	Tasa de interés anual
$5.70	0.70%	43.42%
$5.80	0.77%	48.93%
$5.90	0.84%	54.60%
$6.00	0.91%	60.40%
$6.10	0.98%	66.37%
$6.20	1.05%	72.49%

Lo interesante de la tabla es ver que la tasa de interés es muy sensible a cambios pequeños del pago, ya que son muchos. La pregunta entonces sería ¿cuál debería ser el valor del pago que se debe cobrar? La respuesta la podríamos encontrar en la ley de la oferta y la demanda. Finalmente, nos podemos dar cuenta que un crédito donde se realizan pagos muy frecuentes,

aunque estos sean "pequeños" pueden esconder una tasa de interés elevada. Cabe destacar además que gracias a este tipo de créditos, personas que no tienen acceso a créditos en el sistema bancario, llámese una tarjeta de crédito, pueden adquirir artículos que de otra manera tendrían que prescindir de ellos.

Ejercicios

5.3 Valor presente de una anualidad.

1 Encontrar el valor presente de 7 pagos semestrales de $8,700, a una tasa del 20% anual. El primer pago se hace a los 6 meses.

2 Una computadora con valor de $24,000 se puede pagar con un enganche del 10% y 108 pagos semanales iguales. Si la tasa cobrada es del 2% semanal, encontrar el valor de cada pago.

3 Para pagar una deuda se pactan pagos bimestrales de $1,180 durante 3 años. Si el primer pago se hace el día de hoy y se cobra una tasa del 36% convertible mensualmente, ¿cuál es el valor de la deuda?

4 Un banco al pagar con su tarjeta de crédito, establece para la liquidación del adeudo 6 mensualidades fijas a una tasa del 51% convertible mensualmente. Un cliente al realizar una compra decide pagar el 20% en efectivo y el resto cargarlo a la tarjeta de crédito. Si cada mensualidad que le será cargada es de $2,310, ¿a cuánto ascendió el valor de la compra?

5 Un préstamo de $80,000 por el que se cobra una tasa del 3% mensual, debe ser liquidado con 12 pagos trimestrales, realizando el primer pago al año. Encontrar el valor de cada pago.

6 Para comprar una casa se solicita un préstamo de $150,000, para pagarse a 10 años de forma mensual. Obtener el valor de cada pago si se cobra una tasa del:
a) 8% anual.
b) 15% anual.
c) 30% anual.

7 Un préstamo de $200,000 a una tasa de interés del 24% convertible mensualmente, se pagará de manera mensual. Calcular el valor de cada pago si el préstamo es a:
a) 10 años.
b) 15 años.
c) 20 años.

8 Al comprarse una bicicleta con valor de $6,790 se da un enganche de $1,200 y se acuerda realizar 5 pagos trimestrales comenzando a los 5

meses. Encontrar el valor de cada pago si la tasa es del 23% convertible trimestralmente.

9 Una deuda de $15,000 será pagada mediante 5 pagos semestrales, comenzando a los 2 meses. Con una tasa del 24% convertible semestralmente, calcular el valor de los pagos.

10 Un escritorio se vende con un 20% de enganche y 5 pagos bimestrales de $1,100 comenzando a los 4 meses. Encontrar su precio al contado con una tasa de interés del 3% bimestral.

11 Cierto artículo tiene el siguiente plan de financiamiento: un enganche de $750, 11 pagos mensuales de $600 y un pago final al año de $800. Si la tasa cobrada es del 36% convertible mensualmente, encontrar el precio del bien.

5.4 Valor futuro de una anualidad.

12 Se desean acumular $100,000 dentro de un año por lo que se realizarán 12 depósitos mensuales, comenzando dentro de un mes, a una tasa del 14% convertible mensualmente. Calcular el valor de cada uno de los depósitos.

13 Calcular el valor acumulado de 20 depósitos semestrales de $7,000 a una tasa de interés del 16% anual. El primer depósito se realiza el día de hoy y se desea calcular el valor futuro exactamente a los 10 años.

14 Se está pensando en hacer 36 depósitos mensuales de $1,500 comenzando el día de hoy a una tasa del 1.2% mensual. El dinero acumulado se piensa dejar en el banco para que siga generando intereses aún cuando ya no se efectúe depósito alguno. Encontrar la cantidad que se acumulará en el fondo dentro de 5 años.

15 Una persona desea comprar de contado un refrigerador que en este momento tiene un valor de $10,000. Como no tiene el dinero ahora, piensa realizar 8 depósitos trimestrales, comenzando el próximo trimestre, que le sirvan para comprar de contado el refrigerador dentro de 2 años. La tasa que le ofrecen es del 9% trimestral. Si supone una inflación del 15% anual, ¿qué valor debería tener cada depósito para poder pagar el refrigerador de contado a los 2 años con todo e inflación?

16 Encontrar la cantidad que se acumula con 15 depósitos semestrales de $3,800 a una tasa del 8% convertible semestralmente, si el valor futuro es calculado a los 9 años. Asúmase que el primer depósito se hace al finalizar el primer semestre.

5.5 Algunas observaciones acerca del valor presente y valor futuro de las anualidades.

17 Una deuda de $15,000 debe ser liquidada con 40 pagos trimestrales iguales a una tasa del 1% mensual. Si el primer pago se realiza a los 7 meses, encontrar el valor de cada uno de los pagos.

18 Encontrar la cantidad que se acumula al momento de realizar el último de 50 depósitos trimestrales de $1,900, a una tasa del 8% convertible trimestralmente.

19 ¿Qué depósito anual acumulará $90,000, si se realizarán 15 depósitos consecutivos y se quiere acumular dicha cantidad 2 años y medio después de haber efectuado el último depósito?. Supóngase una tasa anual del 11% y considérese que después del último depósito se siguen generando intereses.

20 Un automóvil debe ser pagado con un enganche del 30% y 8 pagos trimestrales de $15,000 comenzando a los 2 meses. Calcular el valor del carro si la tasa cobrada es del 5% trimestral.

21 ¿Cuánto estaría dispuesta a prestar una persona el día de hoy, si espera recibir 14 pagos semestrales de $1,000, comenzando a los 14 meses, y la tasa que desea ganar es del 20% convertible semestralmente?.

5.6 Anualidades vencidas, anticipadas y diferidas.

22 Encontrar el valor futuro de 16 pagos bimestrales vencidos de $750 a una tasa del 24% anual.

23 Un artículo con valor de $7,200 se pagará con 18 mensualidades anticipadas cobrándose una tasa del 1.7% mensual. Calcular el valor de cada mensualidad.

24 ¿Cuánto se acumulará dentro de 2 años, si se realizarán 8 depósitos trimestrales anticipados de $7,600, a una tasa del 3.2% trimestral?

25 Se desean acumular $30,000 dentro de un año, por lo que se realizarán 12 depósitos mensuales anticipados ganando una tasa del 15% convertible mensualmente. Calcular el valor de cada uno de los depósitos.

26 Se solicita un préstamo de $300,000 para pagarse a 10 años de forma mensual (120 pagos). El primer pago se efectuará a los 18 meses. Si se cobra una tasa del 10% convertible mensualmente, encontrar el valor de cada uno de los pagos.

27 Calcular el valor acumulado a 10 años de un fondo, si se realizan 14 depósitos semestrales de $25,000, comenzando el día de hoy, y se tiene un rendimiento del 7% semestral. El fondo sigue generando intereses aún cuando ya no se realicen depósitos.

28 Te proponen un negocio en el cual recibirías $20,000 bimestrales durante 3 años. Los primeros $20,000 los tendrías a los 9 meses. Si quisieras

ganar un 40% anual, ¿cuánto es lo máximo que invertirías en el negocio el día de hoy?

5.7 Relación entre anualidades vencidas y anticipadas.

29 Un televisor tiene un plan de financiamiento a 6 meses con un interés del 3% mensual y pagos vencidos de $1,600. Si en vez de realizar los 6 pagos vencidos se opta por 6 pagos anticipados, calcular el valor de cada uno de ellos.

30 Calcular el valor presente de 10 pagos semestrales de $24,000 a una tasa del 15% anual, si:
a) son vencidos.
b) son anticipados.

31 Para saldar una deuda deben efectuarse pagos anuales vencidos de $12,000. El deudor para juntar los $12,000 decide realizar 12 depósitos mensuales donde le ofrecen una tasa del 9% convertible mensualmente. Calcular el valor de cada depósito mensual si estos se realizan de forma:
a) vencida.
b) anticipada.

32 Una deuda debe ser pagada con 15 pagos mensuales a cierta tasa de interés, entonces la afirmación de que los pagos vencidos deben tener un mayor valor numérico a los anticipados debe ser cierta. Explicar.

33 Si se considera que la tasa de interés se mantiene constante y tanto el número de pagos como el valor de cada uno de ellos es el mismo, entonces: "el valor presente de los pagos vencidos es mayor al de los anticipados". ¿La afirmación anterior es cierta o falsa? ¿Por qué?

5.8 La incógnita es el número de pagos "n".

34 ¿Cuántos pagos semestrales de $400 son necesarios para saldar una deuda de $1,500, a una tasa del 24% convertible mensualmente?

35 Un artículo que hoy vale $5,201.5 se ofrece con pagos mensuales anticipados de $700, a una tasa del 26% convertible mensualmente. ¿Cuántos pagos deben llevarse a cabo?

36 El día de hoy se retiraron de un fondo $20,048.1 en el cual se realizaron depósitos mensuales vencidos de $1,250. Si la tasa ofrecida fue del 12% anual, ¿cuántos depósitos se realizaron si el último depósito fue hoy?

37 Un adeudo de $25,000 se pactó pagar de forma trimestral con pagos vencidos de $3,200, a una tasa del 18% convertible trimestralmente. Calcular:
a) el número de pagos completos
b) el pago extra que debe realizarse junto con el último pago completo, para saldar exactamente la deuda.

38 Se desean acumular $68,000, por lo que se realizarán depósitos semestrales anticipados de $4,000 (los $68,000 se acumulan un semestre después del último depósito). Si la tasa ofrecida por el fondo es del 8% semestral, calcular:
a) el número de depósitos completos.
b) la cantidad extra que debe ser depositada junto con el primer depósito para acumular exactamente los $68,000.

39 ¿Cuántos pagos bimestrales completos de $13,500 deben realizarse para cancelar una deuda de $141,000, si el primero se realiza a los 6 meses y la tasa cobrada es de un 4.6% bimestral? Además calcúlese el valor del pago extra que se tendría que dar un bimestre después del último completo, para liquidar exactamente el adeudo.

40 Una recámara con valor de $16,000 será pagada mediante mensualidades de $2,500 a una tasa del 24% convertible mensualmente. Calcular:
a) el número de pagos completos de $2,500.
b) el enganche que se hubiera tenido que dar para que con las mensualidades completas se terminara de pagar la recámara.

41 Se quieren acumular $220,000 haciendo depósitos trimestrales vencidos de $30,000, donde el dinero será invertido a un 7% trimestral. Se pretende que al momento de realizar el último depósito se tengan los $220,000. Calcular:
a) el número de depósitos completos necesarios.
b) el valor del último depósito, mayor a los demás, que sirva para acumular la cantidad deseada.
c) Si el día de hoy se realizara un depósito por $44,978.95, y se quisieran acumular los $220,000 en el mismo tiempo que en el inciso a), ¿cuántos depósitos trimestrales de $30,000 deben efectuarse, comenzando el próximo trimestre?

5.9 La incógnita es la tasa de interés.

42 Un banco ofrece que por cada $1,000 en préstamo se tienen que pagar 6 mensualidades fijas de $189.52, ¿qué tasa mensual está cobrando?

43 Un par de tenis cuestan $280 y para comprarlos cierta tienda ofrece un plan de 40 pagos semanales anticipados de $8.90. ¿Qué tasa anual efectiva se está cobrando? Supóngase que un año tiene 52 semanas.

44 Una empresa tiene como prestación un fondo de ahorro, en el cual los trabajadores pueden hacer aportaciones quincenales durante un año. Si el año pasado un trabajador hizo 24 depósitos de $300, y una quincena después de haber efectuado el último recibió $7,966.17, ¿qué tasa de interés anual ofreció el fondo?

45 Una tienda pone a la venta un comedor con precio de $20,000 mediante el siguiente plan: un enganche del 20% y 9 mensualidades de $2,011.25. Una persona está pensando qué le convendría más, si comprar el

comedor a través de la tarjeta de crédito que le cobra un 3.7% mensual, o bien a través del plan que le ofrece la tienda, ¿qué le recomendarías?

46 Al finalizar 48 depósitos mensuales de $350 una institución financiera "A" entregó la cantidad de $20,383.3. Por otra parte, otra institución financiera "B", por 24 depósitos bimestrales de $2,600 entregó $74,896.68, ¿cuál de las dos instituciones ofreció una mejor tasa?

47 Para comprar una sala con valor de $12,500 se ofrecen 2 planes:
a) Un enganche del 10% y 6 mensualidades de $2,349.1, la primera de ellas a los 6 meses.
b) Un enganche del 20% y 3 pagos semestrales vencidos de $4,896.58,
¿qué opción cobra un interés menor?

48 Para su jubilación, una persona realizó depósitos bimestrales de $1,000 durante 10 años. Al realizar el último depósito decidió mantener su dinero 2 años más para después retirar lo acumulado en el fondo. Si retiró $100,547.23:
a) ¿qué tasa de interés anual le ofreció el fondo?
b) ¿cuánto ganó en total de intereses?

49 Para pagar una deuda una persona debe realizar pagos anuales vencidos de $17,000, por lo que ha decidido crear un fondo tal que al realizar 12 depósitos mensuales de $1,349.05, comenzando hoy mismo, pueda acumular el pago anual. ¿Qué tasa anual convertible mensualmente ofrece el fondo? (Si los depósitos comienzan hoy, el último se efectúa a los 11 meses).

5.10 Perpetuidades

50 Calcular el valor presente de pagos perpetuos anuales de $10,000 considerando una tasa del 2.5% mensual.

51 Por un préstamo de $100,000 se pacta una perpetuidad donde los pagos serán de forma trimestral, comenzando al año de haber efectuado el préstamo. Si la tasa cobrada es del 15% semestral, calcular el valor de cada uno de los pagos trimestrales.

52 Un inversionista invertirá $350,000 para poner en marcha un negocio que espera le dé un rendimiento de por vida del 27% convertible mensualmente. ¿Qué cantidad mensual espera recibir? (El rendimiento puede ser considerado como una tasa de interés).

53 Se pide un préstamo de $400,000 que ha de pagarse en 20 años a una tasa del 2% mensual. Si los pagos son mensuales:
a) calcular el valor de la mensualidad.
b) si en vez de 20 años, el crédito se hubiera otorgado a perpetuidad, ¿de cuánto hubiera sido la mensualidad?
c) ¿qué conclusión obtienes de los incisos anteriores?

54 El valor presente de una perpetuidad de pagos mensuales de $1,500 es de $106,780. Si el primer pago se lleva a cabo a los 7 meses, calcular la tasa mensual que se cobró.

55 Explicar por qué una perpetuidad nunca se llega a pagar.

5.11 Problemas varios.

56 Una deuda de $50,000 se debe pagar en 10 años de forma semestral. Si los pagos de los últimos 5 años son el doble que los pagos de los primeros 5 años y la tasa es del 10% semestral, calcular el valor de cada uno de los pagos de los últimos 5 años.

57 Se harán depósitos mensuales de $300 los próximos 5 años, para que un año después de haber efectuado el último depósito, se comiencen a realizar retiros trimestrales durante 3 años. ¿De cuánto deben ser los retiros si la tasa ofrecida es del 8% convertible mensualmente? Después del último depósito se siguen generando intereses para comenzar con los retiros.

58 Una compra por $3,500 se pagó con 2 anualidades: la primera fueron 6 pagos trimestrales de $400 comenzando a los 6 meses, y la segunda fueron 3 pagos semestrales dando inicio en la fecha de la compra. Calcular el valor de los pagos semestrales si para ambas anualidades se considera una tasa del 15% semestral.

59 Por un préstamo de $210,000 se realizarán pagos mensuales durante 10 años, cobrándose una tasa anual del 18%. Calcular:
a) el valor de cada uno de los pagos.
b) el valor real del pago a los 5 años, si se supone una inflación del 12% anual.
c) el valor real del último pago, si se supone una inflación del 12% anual.

60 Calcular el valor presente de 18 pagos semanales donde el primer pago se hace el día de hoy. Los primeros 12 pagos son de $300 cada uno y los siguientes 6 pagos son de $600. Considérese una tasa del 1.2% semanal.

61 Una persona de 25 años proyecta que trabajará 30 años, por lo que efectuará depósitos bimestrales de $500 durante su vida laboral.
a) Calcular el valor futuro de los depósitos si la tasa es del 12% anual.
b) Calcular el valor real del inciso a) si se supone una inflación del 10% anual.

62 Para pagar una deuda de $10,000 se pactan mensualidades de $500 y, además de la mensualidad correspondiente, un pago extra de $2,000 justo al año de recibir el préstamo. Si la tasa es del 18% convertible mensualmente:

a) calcular el número de pagos mensuales completos que se deben realizar.
b) si se desean efectuar de forma exacta el número de pagos obtenidos en el inciso a) realizando un ajuste al pago de $2,000, ¿de cuánto debería ser el pago que se efectúe al año?

63 Se realizarán pagos anuales anticipados de $7,000 durante 5 años; del año 5 en adelante se efectuarán pagos semestrales de forma perpetua, cobrándose una tasa del 15% anual. Si la deuda fue de $40,000, calcular el valor de los pagos semestrales perpetuos.

64 Una persona que se ha comprometido a pagar $5,000 anuales comenzando el día de hoy, decide sustituir dichos pagos por pagos trimestrales vencidos durante el mismo tiempo. Si la tasa cobrada es del 20% anual, ¿de cuánto deben ser los pagos trimestrales?

65 Una persona realizará 25 depósitos anuales de $1,000, para que con lo acumulado comience a efectuar 15 retiros anuales, un año después del último depósito. Si la tasa de interés los primeros 25 años es del 8% y los últimos 15 años es del 7%, ¿de cuánto deben ser los retiros?

66 Se realizarán depósitos mensuales vencidos de $2,940 a una tasa de interés del 2% mensual. Si se desean acumular $17,574.75 al cabo de 12 meses, calcular el número de depósitos necesarios. Nótese que como se empieza el siguiente mes, se pueden dejar de hacer depósitos antes del año y se siguen generando intereses.

Problemas tipo examen.

1 El día de hoy se compra una computadora por la que deben pagarse $4,000 de enganche, 7 mensualidades de $1,500 comenzando a los 3 meses, y además se debe realizar un pago final de $5,000 al año de haberla comprado. Si la tasa que se cobra es del 40% anual, ¿cuál es el valor de contado de la computadora?

2 Una persona desea acumular la cantidad de $25,000 dentro de 12 meses por lo que realizará depósitos mensuales de $3,000 comenzando dentro de un mes. Si la tasa que le ofrece el banco es del 6% anual convertible mensualmente, calcular:
a) el número de depósitos completos de $3,000.
b) el depósito extra que debe realizarse un mes después del último completo para acumular exactamente los $25,000.

Si la persona termina de hacer sus depósitos antes de los 12 meses, se asume que deja su dinero para que se le sigan pagando intereses, tal que a los 12 meses tenga exactamente los $25,000.

3 Una televisión con precio al contado de $7,931.5 se ofrece en una tienda departamental, con 12 mensualidades vencidas de $750, mientras que la misma televisión, en otra tienda departamental, se ofrece con un enganche de $2,000 y 6 mensualidades vencidas de $1,084. ¿Qué tienda cobra una tasa de interés mayor?

4 Se han depositado durante 5 años y de forma mensual $1,100, a una tasa de interés del 15% convertible mensualmente, donde el último depósito se efectuó el día de hoy. Con lo acumulado se realizarán retiros trimestrales vencidos durante 4 años a una tasa del 16% convertible trimestralmente. ¿De cuánto deben ser los retiros para que al cabo de los 4 años queden en el fondo $20,000?

5 Para pagar una bicicleta cuyo precio es de $12,000 se realizarán 36 pagos mensuales vencidos. La tasa de interés del primer año es de un 2%, mientras que la tasa de interés de los últimos dos años es del 1.5%. Calcular el valor de cada uno de los pagos.

CAPÍTULO **6**

TABLAS DE AMORTIZACIÓN

6.1 Introducción.

Una tabla de amortización es una descripción detallada de la evolución de un préstamo, en ella se puede apreciar claramente la manera en que un préstamo se paga: los intereses que periodo a periodo son cobrados, así como la cantidad que se adeuda en un momento determinado.

6.2 Construcción de una tabla de amortización.

En el capítulo anterior se encontró la fórmula de valor presente de una anualidad, tal que si se tenía una deuda, la tasa de interés cobrada y el número de pagos, se podía encontrar el valor de cada pago. A simple vista se podría desconfiar que con las condiciones establecidas el pago salda exactamente el adeudo. Véase el siguiente ejemplo y trate de analizar el razonamiento que se propone.

Ejemplo 6.1 Un préstamo de $10,000 será liquidado mediante 5 pagos anuales a una tasa de interés del 20% anual. Calcular el valor de cada pago.

Como no se especifica, el primer pago se hace al año, por lo que se puede aplicar directamente la fórmula de valor presente. En este caso:

$$10{,}000 = \mathrm{X}\left[\frac{1-(1.2)^{-5}}{0.2}\right]$$

Despejando el pago:

$$\mathrm{X} = 3{,}343.8$$

Supóngase ahora que una persona está renuente a creer que esta cantidad paga el 20% anual estipulado, y presenta el siguiente razonamiento:

Una deuda de $10,000 debe ser pagada con 5 pagos anuales de $3,343.8, lo que da un total de:

$$(3{,}343.8)(5) = 16{,}719$$

Esto significa que los intereses pagados durante los 5 años fueron de $6,719. Realizando un cálculo rápido, la persona divide el total de los intereses entre el capital prestado para saber la tasa de interés cobrada obteniendo:

$$\frac{6{,}719}{10{,}000} = 67.19\%$$

Que en ningún momento se parece al 20% anual que supuestamente se estaría cobrando. ¿Qué es lo que está mal de su análisis?

La respuesta está en que no se está considerando el valor del dinero en el tiempo. Al multiplicarse por 5 el pago, se asume implícitamente que los 5 pagos tienen el mismo valor y eso es totalmente falso. Por otra parte, la operación que realiza la persona contempla el periodo de los 5 años, mientras que la tasa es de un 20% anual, por lo que no pueden ser comparables tampoco. Ahora bien, ¿cómo explicarle a la persona que realmente se le está cobrando el 20%? La respuesta se encuentra precisamente en una tabla de amortización.

Para construir una tabla de amortización nos valdremos del ejemplo anterior, y definiremos las columnas que la componen:

Periodos Establece uno a uno el número de periodos necesarios para cancelar el adeudo.

Pago: Es la cantidad que periodo a periodo debe pagarse, y que sirve tanto para pagar intereses como para amortizar (pagar) el adeudo.

Intereses: Es la cantidad que debe pagarse periodo a periodo por el uso del dinero.

Abono a capital: Es la parte del pago que se destina a la amortización del préstamo.

Saldo insoluto: Es el adeudo que se tiene en un determinado periodo.

Considerando el ejemplo 6.1 tenemos que para el primer periodo la tabla quedaría como sigue:

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				10,000.00
1	3,343.80	2,000.00	1,343.80	8,656.20

En el periodo 0 (el día de hoy), no se ha realizado pago alguno, no se pagan intereses, ni se abona a capital. El saldo insoluto es precisamente toda la deuda de $10,000.

Para el primer periodo se tiene el pago de $3,343.8 que ya ha sido calculado en el ejemplo 6.1. Para calcular los intereses que se generaron durante el primer periodo, basta con multiplicar los $10,000 por la tasa de interés. Calculando:

$$I_1 = (10{,}000)(0.2) = 2{,}000$$

Una vez calculados los intereses se puede obtener el abono a capital. Como el pago que se realiza es de $3,343.8 y se cobran sólo $2,000 por concepto de intereses, la diferencia se utiliza para abonar a capital, disminuyendo la deuda. Para este ejemplo se tiene un abono a capital de:

$$AC_1 = 3{,}343.8 - 2{,}000 = 1{,}343.8$$

El saldo insoluto en el primer periodo se obtiene de restarle al saldo insoluto del periodo cero, lo que se abona de capital. Calculando:

$$10{,}000 - 1{,}343.8 - 8{,}656.2$$

Una vez que se ha realizado el primer pago, el adeudo ya no es la cantidad original de $10,000, ahora el adeudo es por $8,656.2.

El tercer renglón de la tabla de amortización corresponde al periodo 2, mismo que se muestra en el siguiente diagrama:

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				10,000.00
1	3,343.80	2,000.00	1,343.80	8,656.20
2	3,343.80	1,731.24	1,612.56	7,043.65

El pago se mantiene igual en el segundo periodo por ser constante. Para calcular los intereses se deben multiplicar los $8,656.2 por la tasa de interés que es de 0.2.

$$I_2 = (8{,}656.2)(0.2) = 1{,}731.24$$

Los intereses en este periodo son menores que en el anterior, puesto que la cantidad que se debe es ahora menor. El abono a capital vuelve a ser la diferencia entre el pago completo menos el pago de intereses:

$$AC_2 = 3{,}343.8 - 1{,}731.24 = 1{,}612.56$$

El saldo insoluto en 2 se calcula restándole a los $8,656.2, los $1,612.56 que se abonan quedando:

$$8{,}656.2 - 1{,}612.56 = 7{,}043.65$$

Nótese que de forma general los intereses en cualquier periodo, se obtienen de multiplicar el saldo insoluto en el periodo anterior por la tasa de interés:

$$I_t = SI_{t-1}(i) \qquad \textbf{6.1}$$

Por ejemplo: $I_2 = SI_1(i)$, ó $I_4 = SI_3(i)$.

Si denotamos como X el valor del pago, el abono a capital en el periodo t sería:

$$AC_t = X = I_t \qquad \textbf{6.2}$$

Finalmente, el saldo insoluto en el periodo t estaría dado por:

$$SI_t = SI_{t-1} - AC_t \qquad \textbf{6.3}$$

Donde:

- **I_t** : intereses pagados en el periodo t.
- **SI_t** : saldo insoluto en el periodo t.
- **AC_t** : abono a capital en el periodo t.
- **i** : tasa de interés por periodo.

A continuación se presenta la tabla de amortización para los 5 pagos. Todos los valores se pueden calcular utilizando las fórmulas 6.1, 6.2 y 6.3.

TABLA 6.1

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				10,000.00
1	3,343.80	2,000.00	1,343.80	8,656.20
2	3,343.80	1,731.24	1,612.56	7,043.65
3	3,343.80	1,408.73	1,935.07	5,108.58
4	3,343.80	1,021.72	2,322.08	2,786.50
5	3,343.80	557.30	2,786.50	**0.00**
TOTAL	**16,719**	**6,719**	**10,000**	

El saldo insoluto en el quinto periodo es $0.00, indicando que el adeudo ha sido completamente liquidado. De esta forma la tabla 6.1 muestra que realizando 5

pagos anuales de $3,343.797 a una tasa del 20%, se cancela exactamente una deuda de $10,000.

Cabe destacar de la misma tabla 6.1 que los intereses periodo a periodo van disminuyendo, ya que éstos se calculan a partir del saldo insoluto, y este último también disminuye por los abonos a capital. Por otra parte, el abono a capital periodo a periodo aumenta, por mantenerse constante el pago e ir disminuyendo los intereses.

Otro aspecto importante a resaltar es que la suma de los abonos a capital debe ser precisamente el adeudo contraído originalmente. Además, la suma de las columnas de intereses y abono a capital coinciden con la suma de la columna de pagos; esto es porque el pago se divide en dos, parte se destina a pagar intereses, y el resto se abona a capital.

Ejemplo 6.2 Una deuda de $9,708.09 debe ser pagada con 10 pagos mensuales de $1,025, a una tasa de interés del 1% mensual. Construir su tabla de amortización.

La tabla de amortización quedaría como sigue:

TABLA 6.2

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				$9,708.09
1	$1,025	$97.08	$927.92	$8,780.17
2	$1,025	$87.80	$937.20	$7,842.97
3	$1,025	$78.43	$946.57	$6,896.40
4	$1,025	$68.96	$956.04	$5,940.36
5	$1,025	$59.40	$965.60	$4,974.77
6	$1,025	$49.75	$975.25	**$3,999.51**
7	**$1,025**	**$40.00**	**$985.01**	**$3,014.51**
8	$1,025	$30.15	$994.86	$2,019.65
9	$1,025	$20.20	$1,004.80	$1,014.85
10	$1,025	$10.15	$1,014.85	$0.00

Para calcular cualquier renglón de la tabla, sólo basta tener el saldo insoluto del periodo anterior y el valor del pago. Supóngase que se quiere determinar las variables en el periodo 7. En este caso se necesita el saldo insoluto en el periodo 6 que es de $3,999.51 y el pago que es constante de $1,025. Utilizando la ecuación 6.1 con i = 1%:

$$I_7 = SI_6(i) = (3{,}999.51)(0.01) = 40.00$$

Para calcular el abono a capital nos valemos de la fórmula 6.2:

$$AC_7 = X - I_7 = 1{,}025 - 40 = 985$$

Y finalmente el saldo insoluto en el periodo 7, es el saldo insoluto en 6 menos el abono a capital en 7:

$$SI_7 = SI_6 - AC_7 = 3{,}999.52 - 985 = 3{,}014.51$$

De esta forma puede ser calculado cualquier renglón en la tabla. Claro está que se debe conocer el saldo insoluto del periodo anterior a la variable de cálculo.

Como se pudo apreciar en el ejemplo 6.2, sólo basta con tener el saldo insoluto un periodo anterior, para poder calcular todos los rubros de un periodo particular. Imaginemos por un momento que se desean conocer los intereses que se pagan en el periodo 90 de un crédito hipotecario, a menos que se cuente con una computadora, el cálculo sería verdaderamente tedioso si se utilizara una tabla de amortización. Afortunadamente, existen dos métodos para calcular el saldo insoluto en cualquier periodo. Estos métodos se estudiarán a continuación.

6.3 Saldo Insoluto

El saldo insoluto en una fecha determinada es la cantidad que el deudor o prestatario tendría que pagar en ese momento, para que la deuda quedase saldada. Para calcular un saldo insoluto se pueden distinguir dos enfoques: el método prospectivo y el método retrospectivo.

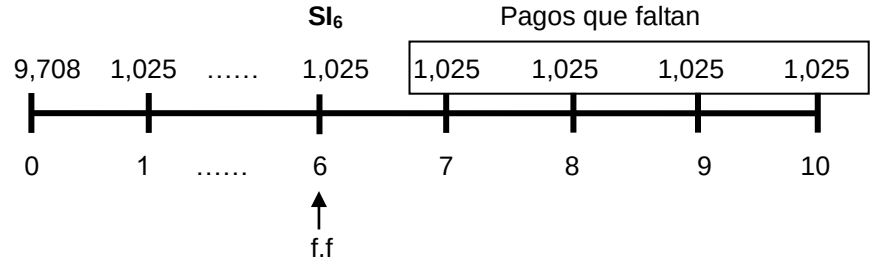
El método prospectivo toma en cuenta los pagos que hacen falta para pagar el adeudo. El saldo insoluto es la deuda en un momento determinado, y para calcularla, este método propone llevar a la fecha en que se quiere calcular el saldo insoluto, todos los pagos que faltan por realizarse. De forma simple se podría definir:

Método prospectivo: Lo que falta por pagar.

Para apreciar este método véanse los siguientes ejemplos:

Ejemplo 6.3 Retomemos el ejemplo 6.2, donde una deuda de $9,708.09 se pagaba mediante 10 pagos mensuales de $1,025 a una tasa del 1% mensual. Calcúlese el saldo insoluto en el mes 6 sin construir la tabla de amortización.

Cuando no se especifica, se asume que al calcular un saldo insoluto ya se efectuó el pago correspondiente a ese periodo. En este caso como se quiere calcular el saldo insoluto en el mes 6, restan únicamente 4 pagos de $1,025 a evaluarse en el mes 6, como lo indica el siguiente diagrama.



Como se quiere calcular el saldo insoluto en el mes 6, ahí se establece la fecha focal. Nótese que los pagos que restan (encerrados en un rectángulo en el diagrama) forman en sí mismos una anualidad, pero ahora de 4 pagos. Como el valor presente evalúa un periodo antes del primer pago, y éste está en el mes 7 tenemos:

$$\mathrm{SI}_6 = (1{,}025)\left[\frac{1-(1.01)^{-4}}{0.01}\right] = 3{,}999.51$$

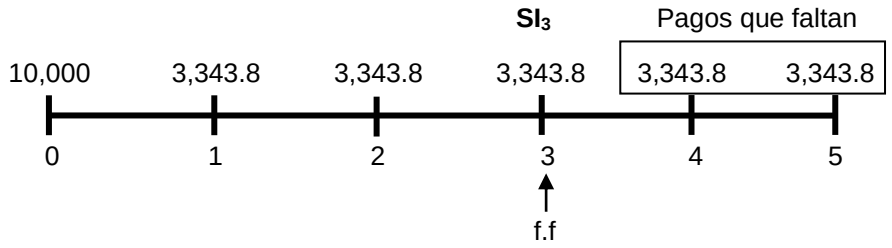
Esta cantidad aparece en la tabla 6.2 en el saldo insoluto del periodo 6.

Ejemplo 6.4 Considerando el ejemplo 6.1 donde una deuda de $10,000 debería ser pagada mediante 5 pagos anuales de $3,343.797 a una tasa del 20% anual, calcular los intereses generados en el periodo 4.

Para calcular los intereses del periodo 4 es necesario calcular el saldo insoluto en el periodo 3. Recordemos que:

$$\mathrm{I}_4 = \mathrm{SI}_3(\mathrm{i})$$

Utilizando un diagrama donde se encierran en un rectángulo los pagos que hacen falta por realizarse se tiene:



De aquí que el saldo insoluto en 3 sea:

$$SI_3 = (3{,}343.797)\left[\frac{1-(1.2)^{-2}}{0.2}\right] = 5{,}108.58$$

Una vez calculado el saldo insoluto en el año 3, los intereses se pueden encontrar multiplicándolo por la tasa de interés:

$$I_4 = (5{,}108.58)(0.2) = 1{,}021.72$$

Ejemplo 6.5 Una deuda de $200,000 se pactó pagar con 120 pagos mensuales a una tasa del 30% convertible mensualmente. Si al cabo de 3 años el prestatario decidió cancelar el total de su adeudo hasta ese momento, ¿qué cantidad tuvo que pagar?

La cantidad que tuvo que pagar es el saldo insoluto después de 36 pagos (los 3 años). Para calcular dicho saldo es necesario encontrar el valor de cada pago. Utilizando la tasa mensual:

$$i_m = \frac{0.3}{12} = 0.025$$

El pago se obtiene de la siguiente ecuación:

$$200{,}000 = X\left[\frac{1-(1.025)^{-120}}{0.025}\right]$$

Donde:

$$X = 5{,}272.36$$

Para calcular el saldo insoluto en el año 3 (pago 36), hay que ver que restan por pagarse 84 mensualidades de $5,272.36. Calculando el adeudo:

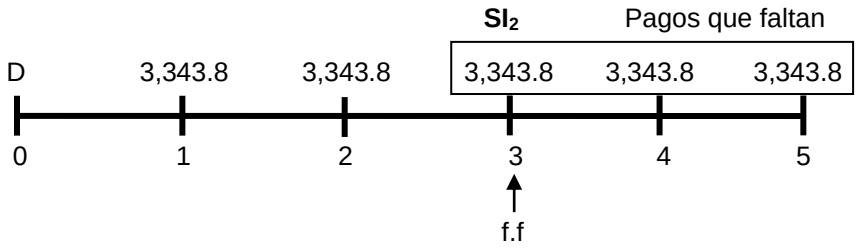
$$SI_{36} = (5{,}272.36)\left[\frac{1-(1.025)^{-84}}{0.025}\right] = 184{,}393.47$$

Nótese que el subíndice que lleva el saldo insoluto (36) corresponde al número de pagos que se han hecho. El deudor al pagar los $184,393.47 termina con su compromiso y ya no necesita efectuar pago alguno.

Una tabla de amortización asume, al calcular cada uno de los conceptos en cada periodo, que el pago correspondiente ya se efectuó, pero no siempre es así. Una persona antes de realizar el pago correspondiente pudiera decidir liquidar el total de su adeudo, por lo que hay que hacer una ligera modificación al cálculo del saldo insoluto. Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.6 Se sabe que 5 pagos anuales de $3,343.797 a una tasa del 20%, liquidan cierto adeudo. Calcular el saldo insoluto justo antes de realizar el tercer pago.

Si asumimos que el subíndice del saldo insoluto indica el número de pagos que se han realizado, el diagrama correspondiente sería:



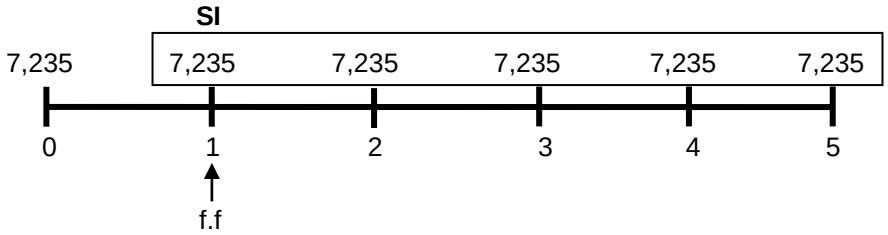
En este ejemplo, el deudor al momento que le corresponde hacer el tercer pago desea saber cuál es su adeudo, pero sin haber realizado el tercer pago. En realidad le restan 3 pagos, por lo que el saldo insoluto sería:

$$\mathrm{SI}_2 = (3{,}343.797)\left[\frac{1-(1.2)^{-3}}{0.2}\right][1.2] = 8{,}449.85$$

A la fórmula de valor presente hay que multiplicarla por 1.2 ya que el primer pago que falta por realizarse está en el año 3, y como la fórmula evalúa un periodo antes, sólo restaría multiplicarla por dicho factor para evaluar la anualidad en la fecha focal.

Ejemplo 6.7 De una deuda restan 5 pagos semestrales de $7,235 a una tasa del 17% convertible semestralmente. Calcular el saldo insoluto, si se asume que el pago que le correspondería al día de hoy aún no se efectúa.

El diagrama que se muestra a continuación, aún cuando el número de periodos contemplados es de 5, no elimina la posibilidad de que hubieran existido más pagos, ya que en 0 se colocó otro pago, pero nuestro interés radica únicamente en los pagos que restan, no en los que ya se hicieron.



Como restan cinco pagos, y la anualidad evaluaría en cero (un periodo antes del primer pago), sólo basta multiplicarla por (1+i) para que ésta evalúe en 1, que es donde tenemos la fecha focal. Con una tasa efectiva semestral del 8.5% tenemos:

$$\text{SI} = (7{,}235)\left[\frac{1-(1.085)^{-5}}{0.085}\right][1.085] = 30{,}933.94$$

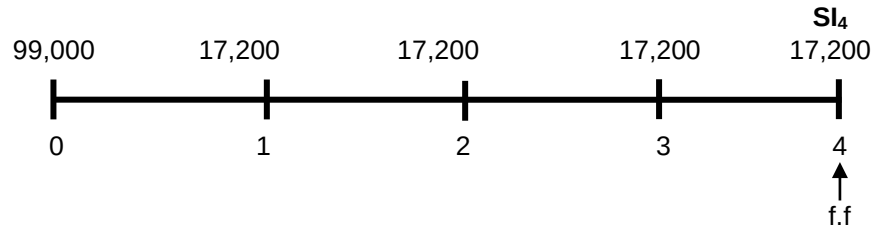
Por otra parte, para calcular un saldo insoluto tenemos el método retrospectivo que toma en cuenta el pasado. **El método retrospectivo lo podemos definir como la diferencia que existe entre la deuda original y los pagos realizados, considerando el valor del dinero en el tiempo**. Precisamente esta diferencia es el adeudo en una fecha determinada. De forma simplificada:

Saldo Insoluto = La Deuda menos los Pagos Realizados

Como veremos en los ejemplos posteriores, los métodos prospectivo y retrospectivo son equivalentes.

Ejemplo 6.8 Por un automóvil con valor de $99,000 se pacta realizar 6 pagos mensuales de $17,200 a una tasa del 1.2% mensual. Calcular el saldo insoluto una vez que se realizó el pago 4 por el método retrospectivo.

Para este método tenemos que ver lo que ya sucedió. En este caso se adquirió la deuda de $99,000, y se han realizado 4 pagos de $17,200. El gráfico sería:



Para calcular el adeudo en el periodo cuatro, este método propone restarle a la deuda los pagos realizados, todo evaluado precisamente en dicho periodo.

$$SI_4 = (99{,}000)(1.012)^4 - (17{,}200)\left[\frac{(1.012)^4 - 1}{0.012}\right]$$

Como nuestra fecha focal está en 4, la deuda hay que acumularla 4 periodos, y a ésta hay que restarle el valor futuro de la anualidad de 4 pagos. Calculando:

$$SI_4 = 103{,}838.22 - 70{,}048.34 = 33{,}789.89$$

Ejemplo 6.9 Una deuda de $71,000 debe ser pagada de manera trimestral a una tasa del 7% trimestral durante 8 años. Calcular el saldo insoluto al momento de realizar el pago 26:

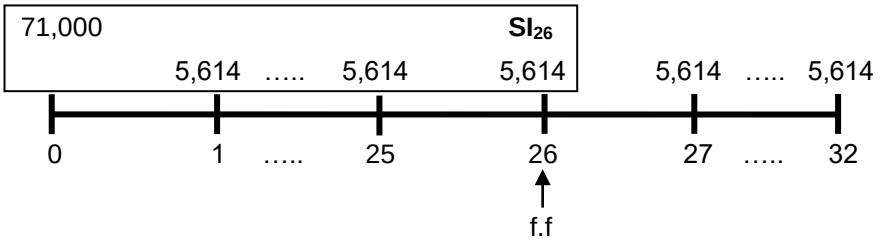
a) por el método retrospectivo.

b) por el método prospectivo.

Primeramente hay que calcular el valor de cada pago trimestral.

$$71{,}000 = X\left[\frac{1-(1.07)^{-32}}{0.07}\right] = 5{,}614.177$$

a) Una vez teniendo el valor de cada pago podemos graficar:



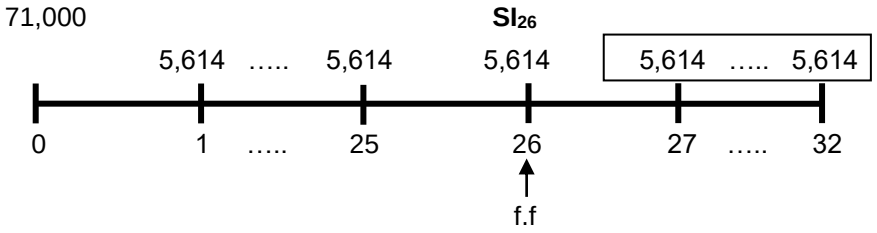
Para el método retrospectivo nos interesa el pasado, que es precisamente lo que se encerró en el rectángulo. Para determinar el saldo insoluto en el pago 26, a la deuda de $71,000 hay que restarle los 26 pagos de $5,614.177 que ya se efectuaron, todo evaluado en el trimestre 26, como se indica en el diagrama.

$$SI_{26} = (71{,}000)(1.07)^{26} - (5{,}614.177)\left[\frac{(1.07)^{26} - 1}{0.07}\right]$$

Realizando operaciones tenemos:

$$SI_{26} = 412{,}322.06 - 385{,}561.86 = 26{,}760.2$$

b) Para el caso del método prospectivo, la parte que nos interesa de la siguiente gráfica es la enmarcada en el rectángulo, lo que falta por pagar:



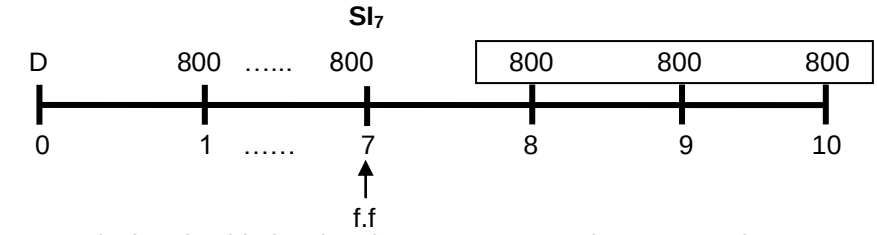
Como podemos observar sólo restan 6 pagos. El saldo insoluto es:

$$SI_{26} = (5{,}614.177)\left[\frac{1-(1.07)^{-6}}{0.07}\right] = 26{,}760.2$$

El saldo insoluto por ambos métodos es el mismo.

Ejemplo 6.10 Por una deuda se han de realizar 10 pagos mensuales de $800 a una tasa del 32% convertible mensualmente. Encontrar el saldo insoluto por ambos métodos una vez realizado el pago 7.

Para este ejemplo el método más sencillo para obtener el saldo insoluto es el prospectivo, ya que se tienen tanto el número de pagos que restan como el valor de los mismos. Graficando:



Para calcular el saldo insoluto hay que traer a valor presente los 3 pagos de $800 que faltan, en el mes 7. Como los pagos son mensuales hay que obtener la tasa efectiva mensual:

$$i_m = \frac{0.32}{12} = 0.0267$$

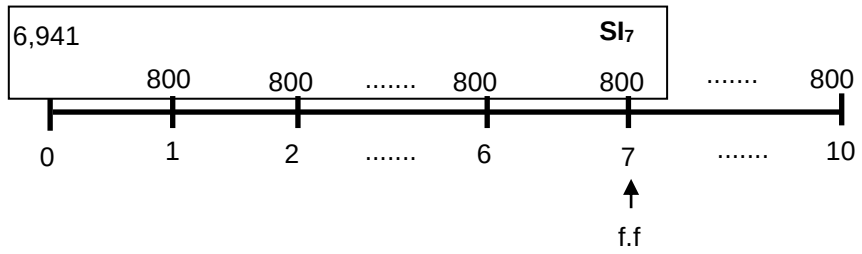
Con la tasa mensual ya podemos calcular el saldo insoluto por el método prospectivo:

$$SI_7 = (800)\left[\frac{1-(1.0267)^{-3}}{0.0267}\right] = 2{,}277.47$$

Para calcular el saldo insoluto por el método retrospectivo (la deuda menos los pagos realizados), primero tendríamos que calcular la deuda:

$$D = (800)\left[\frac{1-(1.0267)^{-10}}{0.0267}\right] = 6{,}941.73$$

Realizamos la siguiente gráfica:



El método retrospectivo involucra las cantidades que están encerradas en el rectángulo. Planteando:

$$SI_7 = (6{,}941.73)(1.0267)^7 - (800)\left[\frac{(1.0267)^7 - 1}{0.0267}\right]$$

Los $6,941.73 deben ser acumulados 7 meses, y restarle el valor futuro de los 7 pagos de $800. Como el último pago de $800 se hace a los 7 meses, la fórmula de valor futuro evalúa directamente en la fecha focal. Realizando operaciones:

$$SI_7 = 8{,}345.92 - 6{,}068.45 = 2{,}277.47$$

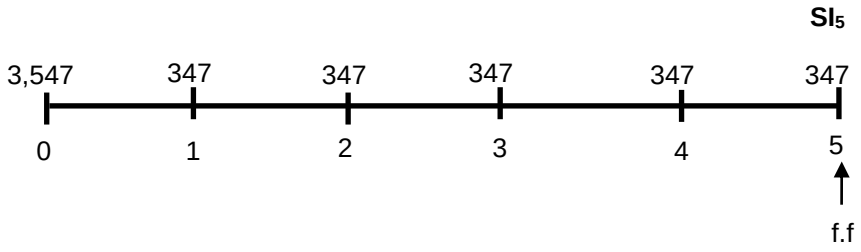
Los resultados son iguales, pero el método retrospectivo resulta mucho más elaborado.

Con el ejemplo 6.10, observamos que **el método prospectivo es más conveniente para el cálculo de un saldo insoluto cuando se tiene el valor de cada pago así como el número de pagos que restan.**

El método prospectivo, de forma general, es más sencillo, desafortunadamente, en algunas ocasiones no se puede aplicar directamente, ya que resultaría demasiado complicado.

Ejemplo 6.11 Una deuda de $3,547.32 se pactó a una tasa de interés del 4.5% bimestral y se han efectuado 5 pagos bimestrales de $347. Calcular el saldo insoluto al momento de hacer el pago 5.

En este caso se complica obtener el saldo insoluto por el método prospectivo, ya que aunque se conoce el valor de cada pago, no se sabe el número de pagos que faltan por realizar. El método retrospectivo en este caso es el más conveniente. Graficando:



En la gráfica aparecen solamente la deuda y los 5 pagos realizados, ya que no se conoce el número de pagos que se van a efectuar. Planteando:

$$SI_5 = (3{,}547.32)(1.045)^5 - (347)\left[\frac{(1.045)^5 - 1}{0.045}\right]$$

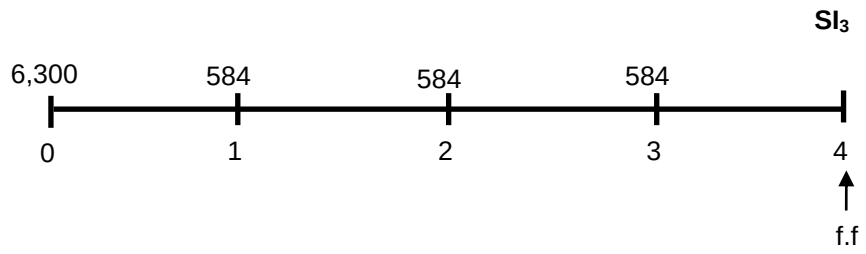
Haciendo las operaciones:

$$SI_5 = 4{,}420.61 - 1{,}898.34 = 2{,}522.27$$

El método retrospectivo es más sencillo de aplicar cuando no se conoce el número de pagos que faltan por realizar.

Ejemplo 6.12 El banco cobra una tasa de interés del 3.7% mensual en sus tarjetas de crédito. Una persona que financió una compra de $6,300 con su tarjeta, ha realizado 3 pagos mensuales de $584. En el cuarto mes, justo antes de efectuar el cuarto pago decide liquidar el total de su adeudo. ¿Cuánto es lo que debe pagar si la tasa se mantuvo fija?

En este ejemplo se debe utilizar el método retrospectivo ya que no se conoce el número de pagos de $584 que restarían. Otro aspecto a considerar es que el saldo insoluto se calcula un mes después de haber realizado el último pago, como se muestra en la siguiente figura:



En la figura aunque el saldo insoluto se calcula en el mes 4, se le coloca el subíndice 3 ya que el subíndice indica el número de pagos realizados. En este caso la deuda hay que acumularla 4 meses, y el valor futuro de los 3 pagos de $584 que estaría evaluado en 3, hay que acumularlo un mes para colocar todo en la fecha focal. Planteando:

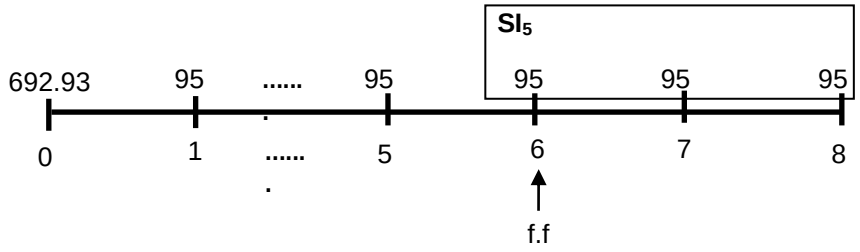
$$\mathrm{SI}_3 = (6{,}300)(1.037)^4 - (584)\left[\frac{(1.037)^3 - 1}{0.037}\right](1.037)$$

Resolviendo:

$$\mathrm{SI}_3 = 7{,}285.44 - 1{,}884.88 = 5{,}400.56$$

Ejemplo 6.13 Deben realizarse 8 pagos mensuales de $95, a una tasa de interés del 2.1% mensual, para saldar una deuda de $692.93. Si se quiere calcular el saldo insoluto en el mes 6 y no se ha efectuado el pago correspondiente (sólo se han hecho 5 pagos), calcular el saldo insoluto por los métodos prospectivo y retrospectivo.

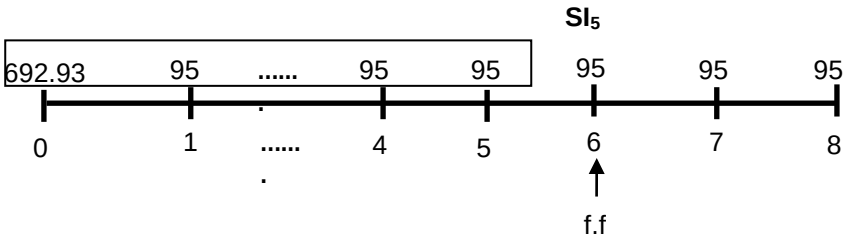
a) Para el método prospectivo faltan 3 pagos como se muestra en el diagrama:



El saldo insoluto tiene el subíndice 5 ya que se han realizado 5 pagos. Para calcularlo se deben traer a valor presente los 3 pagos de $95, donde la anualidad evalúa en el mes 5, por lo que hay que acumularla un periodo:

$$SI_5 = (95)\left[\frac{1-(1.021)^{-3}}{0.021}\right](1.021) = 279.18$$

b) Para el método retrospectivo se han realizado 5 pagos. El diagrama sería:



La deuda debe ser acumulada 6 periodos y el valor futuro de la anualidad de 5 pagos de $95, debe ser acumulada un periodo, ya que el último pago se realiza en el mes 5. Planteando la ecuación:

$$SI_5 = (692.93)(1.021)^6 - (95)\left[\frac{(1.021)^5 - 1}{0.021}\right](1.021)$$

Calculando:

$$SI_5 = 784.95 - 505.78 = 279.18$$

Como habíamos visto, ambos métodos son equivalentes.

En esta sección nos hemos concentrado en el cálculo exclusivamente del saldo insoluto, sin embargo, el saldo insoluto en cualquier periodo era útil para calcular el siguiente renglón en una tabla de amortización. En los siguientes ejemplos veremos su aplicación.

Ejemplo 6.14 Por una deuda de $11,659.6 se realizarán 16 pagos trimestrales de $1,420 a una tasa del 36.8% anual convertible trimestralmente. Encontrar:

a) El saldo insoluto una vez que se realizó el pago 12.

b) Los intereses en el pago 14.

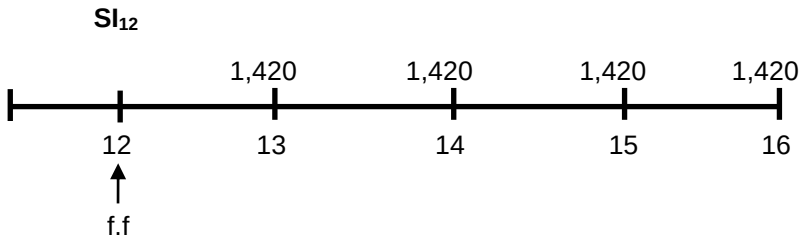
c) El saldo insoluto en el trimestre 7 sin haber realizado el pago correspondiente (se han hecho 6 pagos).

d) El abono a capital en el pago 13.

Como la tasa es anual convertible trimestralmente, para obtener la tasa efectiva trimestral basta con dividir entre 4:

$$i_t = \frac{0.368}{4} = 0.092$$

a) Para calcular el saldo insoluto una vez que se realizó el pago 12, tenemos que traer a valor presente los 4 pagos de $1,420, como se muestra en el diagrama:



Se muestran únicamente los 4 pagos de $1,420 que faltan por realizar. El saldo insoluto sería:

$$SI_{12} = (1{,}420)\left[\frac{1-(1.092)^{-4}}{0.092}\right] = 4{,}580.28$$

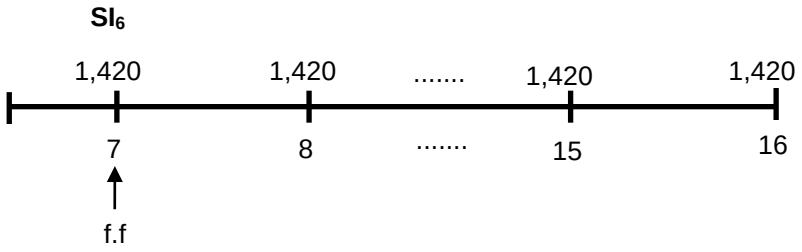
b) Para encontrar los intereses en el pago 14 es necesario calcular el saldo insoluto en el periodo 13. El saldo insoluto se calcula en función de los 3 pagos que restarían por pagarse:

$$SI_{13} = (1{,}420)\left[\frac{1-(1.092)^{-3}}{0.092}\right] = 3{,}581.66$$

Los intereses son calculados multiplicando el saldo insoluto en 13 por la tasa de interés (ecuación 6.1):

$$I_{14} = SI_{13}(i) = (3{,}581.66)(0.092) = 329.51$$

c) Se desea el saldo insoluto en el trimestre 7 sin que se haya hecho el pago correspondiente. El diagrama quedaría:



El saldo insoluto sería el valor presente de los 10 pagos que faltan, ya que no se ha hecho el pago del periodo 7. Entonces como se han realizado 6 pagos:

$$\mathrm{SI}_6 = (1{,}420)\left[\frac{1-(1.092)^{-10}}{0.092}\right](1.092) = 9{,}864.47$$

Se multiplica por 1.092 porque la anualidad evalúa un periodo antes del primer pago.

d) Para encontrar el abono a capital en el periodo 13, se necesita el saldo insoluto en el periodo 12. En a) se calculó y se tiene:

$$\mathrm{SI}_{12} = 4{,}580.28$$

El abono a capital es la diferencia entre el pago total y los intereses cobrados. Los intereses en 13 estarían dados por:

$$\mathrm{I}_{13} = (\mathrm{SI}_{12})(\mathrm{i}) = (4{,}580.28)(0.092) = 421.39$$

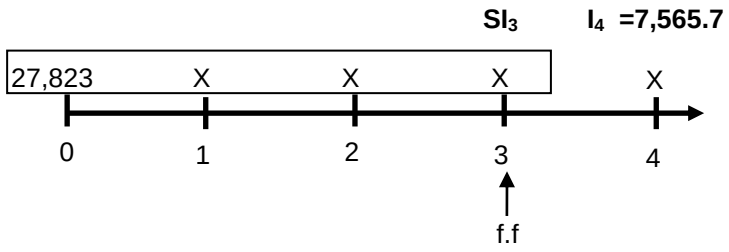
Finalmente:

$$\mathrm{AC}_{13} = \mathrm{X} - \mathrm{I}_{13} = 1{,}420 - 421.39 = 998.61$$

Ejemplo 6.15 Se sabe que una deuda de $27,823.85 debe ser pagada con pagos anuales. Si se cobra una tasa de interés del 30% anual y los intereses que se generaron en el pago 4 fueron de $7,565.70, calcular el valor de cada uno de los pagos anuales.

De acuerdo a la fórmula 6.1, $\mathrm{I}_t = \mathrm{SI}_{t-1}(\mathrm{i})$, los intereses en cualquier periodo están en función del saldo insoluto en el periodo anterior. En este caso se tiene que los intereses en el pago 4 están en función del saldo insoluto en el año 3.

Véase el diagrama:



En este caso, como se tienen los intereses, se puede encontrar el saldo insoluto en el año 3 de la siguiente forma:

$$I_4 = SI_3(i)$$

Despejando el saldo insoluto se tiene:

$$SI_3 = \frac{I_4}{i} = \frac{7{,}565.7}{0.3} = 25{,}219$$

Teniendo el saldo insoluto en el año 3, y considerando el método retrospectivo tendríamos:

$$SI_3 = 27{,}823.85(1.3)^3 - X\left[\frac{(1.3)^3 - 1}{0.3}\right]$$

Sustituyendo el saldo insoluto que ya se calculó, la única incógnita sería el valor del pago.

$$25{,}219 = 61{,}129 - X[3.99]$$

Se tiene finalmente que:

$$X = 9{,}000$$

6.4 Casos más generales

Hasta el momento se han estudiado únicamente los casos en donde la deuda debe ser liquidada mediante pagos vencidos. En la práctica, se pueden liquidar los adeudos con pagos anticipados o diferidos, por lo que habría que realizar pequeñas correcciones a la tabla de amortización estudiada. Analizaremos primero el caso con pagos anticipados y posteriormente lo haremos con pagos diferidos.

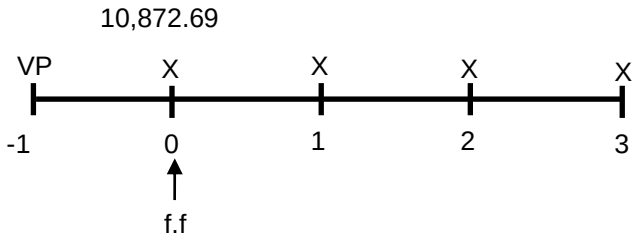
Ejemplo 6.16 Una deuda de $10,872.685 debe ser liquidada mediante 4 pagos anuales anticipados a una tasa de interés del 20% anual.

a) Calcular el valor de cada pago.

b) Elaborar una tabla de amortización.

c) Sin utilizar la tabla de amortización, calcular el saldo insoluto al momento de efectuar el tercer pago.

a) La gráfica quedaría de la siguiente forma:



Como son pagos anticipados el valor presente estaría evaluado en -1. Planteando la ecuación:

$$10{,}872.685 = X\left[\frac{1-(1.2)^{-4}}{0.2}\right](1.2)$$

Despejando:

$$X = 3{,}500$$

b) La tabla de amortización sería:

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0	$3,500	$0.00	$3,500	**$7,372.69**
1	$3,500	$1,474.54	$2,025.46	$5,347.22
2	$3,500	$1,069.44	$2,430.56	$2,916.67
3	$3,500	$583.33	$2,916.67	$0.00
TOTAL	**$14,000**	**$3,127.31**	**$10,872.69**	

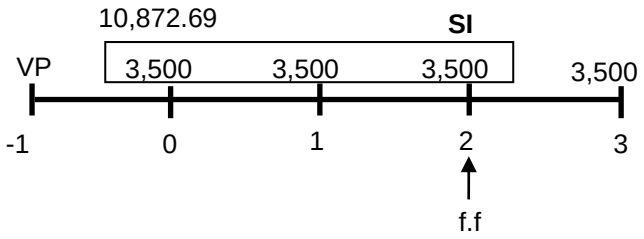
Como el primer pago se hace al contraer la deuda (el día de hoy), el saldo insoluto en cero es:

$$10{,}872.685 - 3{,}500 = 7{,}372.685$$

Que es la cantidad que aparece en la tabla en el saldo insoluto para el periodo cero.

De ahí en adelante la construcción de la tabla es idéntica a la que se había elaborado anteriormente: los intereses se calculan en función del saldo en el periodo anterior, el abono a capital es la diferencia entre el pago y los intereses; y finalmente el saldo en un periodo se calcula restándole al saldo en el periodo anterior, el abono a capital.

c) El saldo insoluto en el tercer pago se puede calcular partiendo del gráfico:



En el diagrama se encierran los pagos ya realizados. El saldo insoluto por el método prospectivo sería traer a valor presente el pago de $3,500 que falta:

$$\text{SI} = \frac{3{,}500}{1.2} = 2{,}916.67$$

Para confirmar este resultado basta con consultar la tabla de amortización del inciso b).

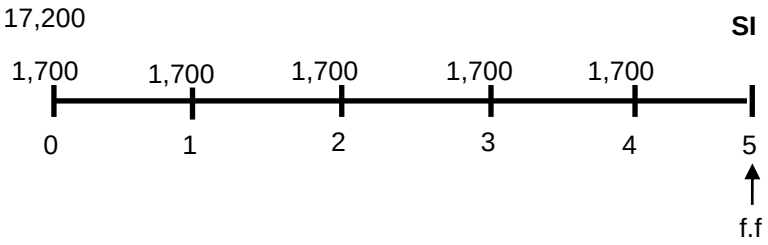
Mediante el método retrospectivo se tiene:

$$\text{SI} = (10{,}872.69)(1.2)^2 - (3{,}500)\left[\frac{(1.2)^3 - 1}{0.2}\right] = 2{,}916.67$$

La deuda debe ser acumulada 2 periodos, y se le tiene que restar los 3 pagos de $3,500. En ambos casos se obtiene el mismo saldo insoluto.

Ejemplo 6.17 Una computadora se compró hace 5 meses cuando el precio de contado era de $17,200. Se estipularon pagos mensuales anticipados de $1,700. Si se quisiera liquidar totalmente el adeudo el día de hoy, y se supone que no se ha realizado el pago de la mensualidad correspondiente, calcular el saldo considerando una tasa del 2.5% mensual.

Nótese que como los pagos son anticipados, al mes 5 ya se han hecho un total de 5 pagos, sin haber hecho el del mes 5, como lo muestra el diagrama.



El saldo insoluto se puede calcular fácilmente por el método retrospectivo. El planteamiento sería:

$$\text{SI} = (17{,}200)(1.025)^5 - (1{,}700)\left[\frac{(1.025)^5 - 1}{0.025}\right](1.025)$$

Realizando operaciones:

$$\text{SI} = 19{,}460.22 - 9{,}159.15 = 10{,}301.07$$

Para el caso en que se tienen pagos diferidos la tabla de amortización, en apariencia, se torna diferente, pero en esencia no cambia, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.18 Se realizarán 3 pagos trimestrales de $6,970 para saldar una deuda de $15,066.75. Si la tasa cobrada es del 8.6% trimestral y el primer pago se realiza a los 9 meses:

a) construir una tabla de amortización.

b) calcular el saldo insoluto una vez que se realizó el segundo pago.

c) calcular el saldo insoluto en el mes 6, a partir de la fecha en que se contrajo la deuda.

a) Para construir la tabla de amortización es importante considerar que aún cuando no se realicen pagos, se siguen generando intereses, y en este caso, en vez de disminuir el capital, va a ir aumentando mientras no se realicen pagos.

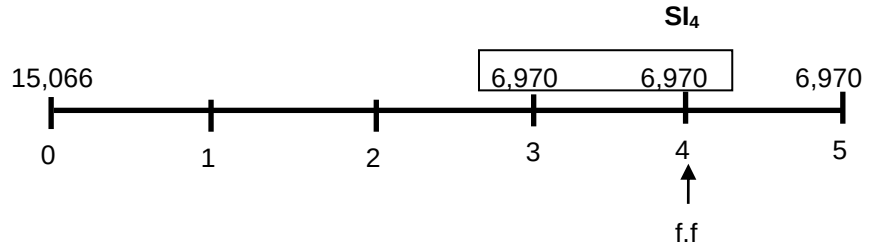
Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				$15,066.75
1	$0	$1,295.74	**-$1,295.74**	$16,362.49
2	$0	$1,407.17	**-$1,407.17**	$17,769.66
3	$6,970	$1,528.19	$5,441.81	$12,327.86
4	$6,970	$1,060.20	$5,909.80	$6,418.05
5	$6,970	$551.95	$6,418.05	$0.00
TOTAL	**$20,910**	**$5,843.25**	**$15,066.75**	

En el primer trimestre los intereses no son cubiertos, por lo que el abono a capital ahora es negativo, lo que significa que el saldo insoluto aumenta. Recordemos que:

$$SI_1 = SI_0 - AC_1$$

Para el segundo periodo, nuevamente no hay pago y el abono a capital vuelve a ser negativo, incrementándose una vez más el saldo insoluto. Es hasta el tercer trimestre (mes 9) que existe un pago y que además de cubrirse los intereses, hay un verdadero abono a capital. De aquí en adelante la tabla funciona como en los ejemplos anteriores.

b) Se desea calcular el saldo insoluto una vez realizado el segundo pago, sin necesidad de construir la tabla. Para encontrar el saldo insoluto nos apoyaremos en el siguiente diagrama:



Por el método prospectivo se tendría que traer a valor presente sólo un pago:

$$SI = (6{,}970)(1.086)^{-1} = 6{,}418.05$$

Por el método retrospectivo la deuda debe ser acumulada 4 trimestres y se le deben restar los 2 pagos realizados:

$$SI = 15{,}066.75(1.086)^4 - (6{,}970)\left[\frac{(1.086)^2 - 1}{0.086}\right]$$

Calculando:

$$\text{SI} = 6{,}418.05$$

El saldo insoluto coincide en ambos casos con el resultado obtenido con la tabla de amortización.

c) El saldo insoluto en el mes 6 (trimestre 2) se calcula únicamente acumulando la deuda 2 trimestres, ya que no se ha realizado pago alguno. Entonces:

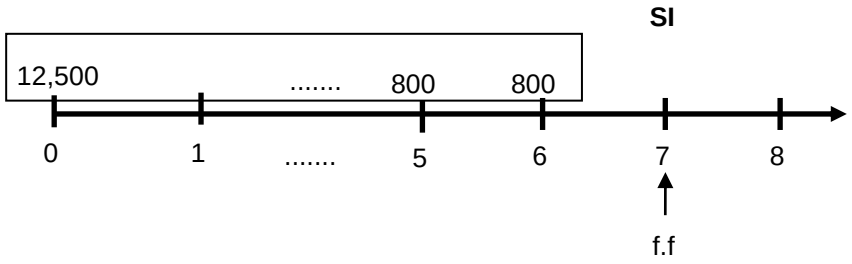
$$\text{SI} = 15{,}066.75(1.086)^2 = 17{,}769.66$$

Esta cantidad es precisamente la que se obtuvo en la tabla de amortización.

Ejemplo 6.19 Se contrajo una deuda de $12,500 bajo las siguientes condiciones: se realizarían pagos mensuales de $800 a una tasa de interés del 1.5% mensual, y el primer pago se debería hacer a los 5 meses. Calcular:

a) El saldo insoluto justo antes de realizar el tercer pago.
b) Los intereses en el cuarto pago.

a) Para calcular el saldo insoluto antes de efectuar el tercer pago hay que considerar que sólo se han hecho 2 pagos, como se muestra en el diagrama:



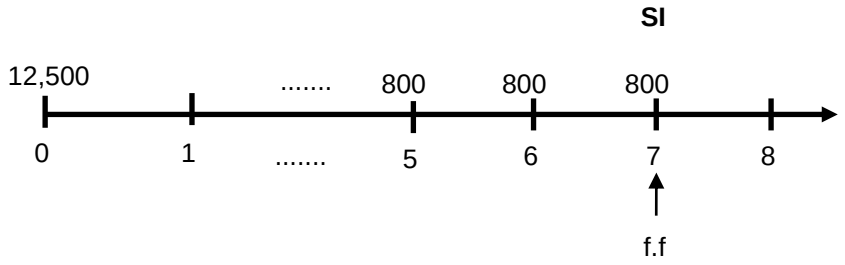
El saldo insoluto se calcula en el mes 7, ya que en ese momento le correspondería el tercer pago, mismo que no se ha realizado. Planteando:

$$\text{SI} = 12{,}500(1.015)^7 - (800)\left[\frac{(1.015)^2 - 1}{0.015}\right](1.015)$$

El valor futuro de la anualidad se multiplica por el factor (1.015) porque el último pago está en 6 y hay que acumular la anualidad un periodo. Realizando las operaciones se tiene:

$$\text{SI} = 13{,}873.06 - 1{,}636.18 = 12{,}236.88$$

b) Para calcular los intereses en el cuarto pago se debe considerar el saldo insoluto una vez realizado el tercer pago, como se muestra en el gráfico:



La única diferencia entre los gráficos es que el pago correspondiente al del mes 7 ya se realizó en este último. De forma simplificada, el saldo insoluto en este caso se puede calcular partiendo del saldo insoluto calculado en el inciso a) y restándole el pago de $800. Esto se puede hacer porque tanto el saldo insoluto como el pago se encuentran en el mes 7. El saldo insoluto una vez realizado el tercer pago es:

$$\text{SI} = 12{,}236.88 - 800 = 11{,}436.88$$

Si se hubiera querido obtener este saldo de la forma conocida, la deuda debe ser acumulada 7 meses y se le debe restar los 3 pagos de $800.

$$\text{SI} = 12{,}500(1.015)^7 - (800)\left[\frac{(1.015)^3 - 1}{0.015}\right]$$

Realizando operaciones:

$$\text{SI} = 13{,}873.06 - 2{,}436.18 = 11{,}436.88$$

Una vez teniendo el saldo insoluto, los intereses se calculan multiplicando éste por la tasa de interés.

$$\text{I} = (11{,}436.88)(0.015) = 171.55$$

6.5 Fondos de acumulación.

En esta sección veremos, apoyándonos en una tabla, como es que cierto número de depósitos pueden llegar a acumular una cantidad deseada en el futuro. Análogamente a las tablas de amortización se mostrará periodo a periodo

el comportamiento del fondo, sin olvidar que para el fondo el dinero le pertenece a la persona que realiza los depósitos.

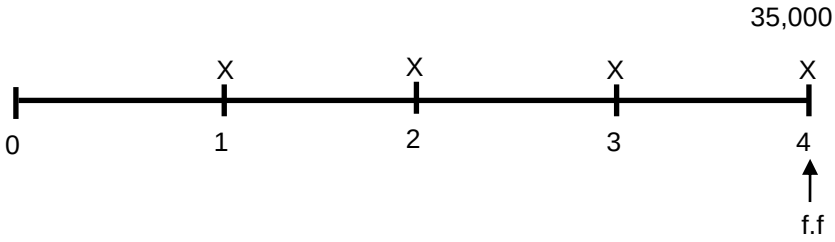
Ejemplo 6.20 Una persona desea acumular en un fondo $35,000 dentro de 2 años, por lo que realizará 4 depósitos semestrales vencidos a una tasa del 10% semestral.

a) Calcular el valor de cada uno de los depósitos.

b) Construir una tabla para el fondo.

c) Determinar el saldo en el fondo al cabo de 3 periodos sin utilizar la tabla.

a) Los depósitos se pueden calcular directamente de la fórmula de valor futuro. Véase la siguiente gráfica:



Planteando la ecuación:

$$35{,}000 = X\left[\frac{(1.10)^4 - 1}{0.10}\right]$$

Realizando las operaciones, encontramos que el valor de cada uno de los depósitos es:

$$X = 7{,}541.48$$

b) La tabla del fondo tiene solamente 4 columnas. En la tabla que a continuación se presenta, sólo se muestra el primer mes. Nótese en el diagrama que el primer depósito se hace al final del mes, por lo que no se generan intereses, lo que trae como consecuencia que el saldo en el fondo, una vez transcurrido el mes, sea precisamente el valor del primer depósito.

Periodo	Depósito	Intereses	Saldo en el Fondo
0			$0.00
1	$7,541.48	$0.00	$7,541.48

El segundo periodo está esquematizado en la siguiente tabla:

Periodo	Depósito	Intereses	Saldo en el Fondo
0			$0.00
1	$7,541.48	$0.00	$7,541.48
2	$7,541.48	$754.15	$15,837.11

En el segundo periodo se vuelve a efectuar el depósito de $7,541.48. Los intereses del segundo periodo se calculan en función de lo que se tenía en el fondo en el periodo 1:

$$I = (7{,}541.48)(0.10) = 754.15$$

Para el cálculo de los intereses no se contempla el segundo depósito, ya que éste se efectúa al final del periodo. Finalmente, el saldo en el fondo al final del segundo periodo es la suma tanto del saldo en el fondo en el periodo 1, el depósito realizado, y los intereses generados. Si representamos el saldo en el fondo por **SF** tenemos:

$$SF = 7{,}541.48 + 7{,}541.48 + 754.15 = 15{,}837.11$$

El tercer periodo estaría representado de la siguiente forma:

Periodo	Depósito	Intereses	Saldo en el Fondo
0			$0.00
1	$7,541.48	$0.00	$7,541.48
2	$7,541.48	$754.15	$15,837.11
3	$7,541.48	$1,583.71	$24,962.30

En el tercer periodo se depositan los $7,541.48. Los intereses generados son:

$$I = (15{,}837.11)(0.10) = 1{,}583.71$$

El fondo acumulado en el tercer periodo es:

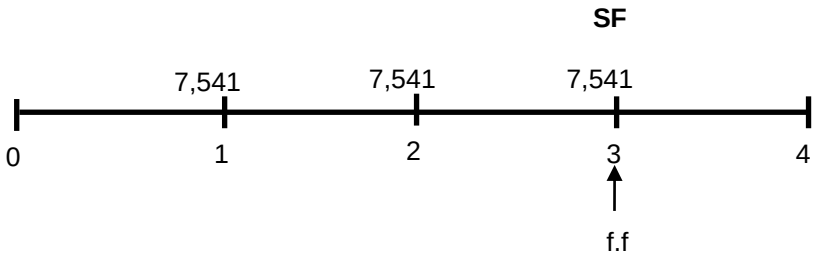
$$SF = 15{,}837.11 + 7{,}541.48 + 1{,}583.71 = 24{,}962.3$$

La tabla completa quedaría de la siguiente manera:

Periodo	Depósito	Intereses	Saldo en el Fondo
0			$0.00
1	$7,541.48	$0.00	$7,541.48
2	$7,541.48	$754.15	$15,837.11
3	$7,541.48	$1,583.71	$24,962.30
4	$7,541.48	$2,496.23	$35,000
TOTAL	**$30,165.92**	**$4,834.09**	

Al final de los 4 semestres se tiene acumulada la cantidad de $35,000.

c) El saldo en el fondo es el valor futuro de los 3 depósitos realizados, como se esquematiza a continuación.



Calculando:

$$SF = 7{,}541.48\left[\frac{(1.1)^3 - 1}{0.1}\right] = 24{,}962.30$$

Este resultado coincide con el obtenido en la tabla elaborada en el inciso anterior.

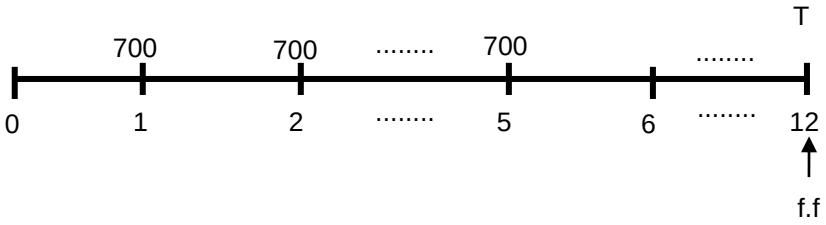
Ejemplo 6.21 Se realizarán 5 depósitos mensuales de $700 comenzando el mes próximo. El fondo ofrece una tasa del 1.3% mensual. Si el dinero se retira dentro de un año a partir de hoy:

a) calcular la cantidad que se retira al cabo de un año.

b) si se decidiera retirar todo el dinero del fondo a los 6 meses, ¿de qué cantidad se podría disponer?

c) construir una tabla para el inciso a).

a) El diagrama siguiente esquematiza los depósitos.



Después del quinto depósito se siguen generando intereses durante 7 meses. El total acumulado por los depósitos al año sería:

$$T = 700\left[\frac{(1.013)^5 - 1}{0.013}\right](1.013)^7$$

Realizando operaciones:

$$T = 3{,}932.11$$

Esta cantidad es lo que se lleva acumulado hasta el mes cinco.

b) Para calcular el saldo en el fondo basta con acumular los 5 depósitos de 700 y evaluarlos en el mes 6. El planteamiento sería:

$$SF = 700\left[\frac{(1.013)^5 - 1}{0.013}\right](1.013) = 3{,}638.89$$

c) Finalmente, la tabla del fondo de acumulación se muestra a continuación.

A partir del mes 6 el fondo se incrementa únicamente por los intereses generados ya que no se efectúa depósito alguno. Se señalan en negrillas tanto el saldo al final de los 12 meses como el saldo a los 6 meses, notando que corresponden a los incisos a) y b) respectivamente.

Periodo	Depósito	Intereses	Saldo en el Fondo
0			$0.00
1	$700.00	$0.00	$700.00
2	$700.00	$9.10	$1,409.10
3	$700.00	$18.32	$2,127.42
4	$700.00	$27.66	$2,855.07
5	$700.00	$37.12	$3,592.19
6	$0.00	$46.70	**$3,638.89**
7	$0.00	$47.31	$3,686.19
8	$0.00	$47.92	$3,734.12
9	$0.00	$48.54	$3,782.66
10	$0.00	$49.17	$3,831.83
11	$0.00	$49.81	$3,881.65
12	$0.00	$50.46	**$3,932.11**
TOTAL	**$3,500.00**	**$432.11**	

CASO DE ESTUDIO

¡Cuánto realmente pagas en un crédito hipotecario!

Cuando se adquiere un crédito hipotecario el tiempo mínimo que se utiliza para pagarlo es de 10 años con pagos mensuales. En algunas ocasiones, con tal de disminuir el valor del pago, la gente está dispuesta a tomar el crédito por más tiempo; algunas veces los llegan a tomar hasta por 30 años.

En este caso vamos a analizar la amortización de un crédito de $400,000 a una tasa de interés del 1.2% mensual a un plazo de 20 años. En este caso, el número de pagos es de 240 y el valor del pago se puede calcular como:

$$400{,}000 = X\left[\frac{1-(1.012)^{-240}}{0.012}\right]$$

Donde el valor del pago es:

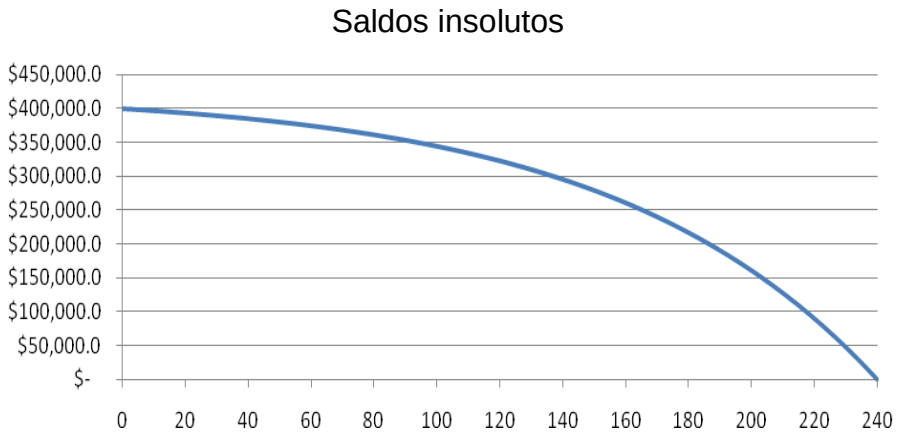
$$X = 5{,}090.71$$

Si elaboramos una tabla de amortización para el primer año tenemos:

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				$400,000
1	$5,090.7	$4,800	$291	$399,709
2	$5,090.7	$4,797	$294	$399,415
3	$5,090.7	$4,793	$298	$399,117
4	$5,090.7	$4,789	$301	$398,816
5	$5,090.7	$4,786	$305	$398,511
6	$5,090.7	$4,782	$309	$398,203
7	$5,090.7	$4,778	$312	$397,890
8	$5,090.7	$4,775	$316	$397,574
9	$5,090.7	$4,771	$320	$397,254
10	$5,090.7	$4,767	$324	$396,931
11	$5,090.7	$4,763	$328	$396,603
12	$5,090.7	$4,759	$331	$396,272

Como se puede apreciar, a pesar de que los pagos son de $5,090.71, el abono a capital en los 12 primeros pagos no supera los $350 en algún periodo, por lo que casi todo el pago, se destina al cumplimiento de intereses. Si sumamos simplemente los 12 pagos, sin considerar el valor del dinero en el tiempo, vemos que el resultado es de $61,088, peo el saldo insoluto ha disminuido menos de $3,800. ¡La diferencia se ha destinado únicamente al pago de intereses!

Una gráfica del comportamiento del saldo insoluto puede ser muy ilustrativa:



Nótese que el saldo insoluto disminuye muy lentamente y que para el pago 121 el saldo insoluto es mayor a $300,000. Esto es porque al inicio el pago de intereses es muy elevado, y el saldo insoluto disminuye muy lentamente. A partir del pago 161, el saldo disminuye más rápidamente porque el abono a capital va siendo cada vez más alto.

¿Qué pasaría si se abonara una mensualidad más en el pago 12? ¿Cuántos meses antes se pagaría el crédito?

Viendo la tabla de amortización en sus doce primeros pagos se tiene que el saldo insoluto en el mes doce es de $396,272, pero si en el mes doce se abonara otro pago, entonces la tabla quedaría en los meses 11, 12 y 13:

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
11	$5,090.7	$4,763	$328	$396,603
12	$10,181.4	$4,759	$5,422	$391,181
13	$5,090.7	$4,694	$397	$390,785

Si consideramos que los pagos se mantendrán en $5,090.71, entonces el tiempo se reducirá. Como ya se hicieron 12 pagos, originalmente faltarían 228 pagos,

pero ahora, para determinar cuántos pagos faltan se necesita resolver para n la siguiente ecuación:

$$391{,}181 = 5{,}090.71\left[\frac{1-(1.012)^{-n}}{0.012}\right]$$

Resolviendo, podemos darnos cuenta que “n” es casi 214, por lo que al adelantar una mensualidad en el mes 12 entonces se estarían ahorrando cerca de 14 pagos.

En caso de que se decidiera adelantar otra mensualidad en el mes 24, sólo restarían 192 pagos, por lo que con esas 2 mensualidades adelantadas, se tendría una disminución de 24 mensualidades. El crédito se pagaría en 18 años y no en los 20 años originalmente pactados.

De esta manera, vemos que al adelantar pagos se puede disminuir significativamente el tiempo o plazo del crédito.

Solo resta mencionar que aunque en un crédito hipotecario la suma de los pagos sea dos o tres veces el capital prestado, no significa que el crédito es caro. Lo que hay que considerar es que la tasa de interés sea baja. Si la tasa es baja, no importa que el crédito sea una perpetuidad, ya que se obtendrá un financiamiento barato, aunque la suma de intereses se pague mucho.

Ejercicios

6.2 Construcción de una tabla de amortización.

1 Por una sala con valor de $7,200 al contado, se realizarán 6 pagos mensuales cobrándose una tasa del 30% convertible mensualmente.
a) Calcular el valor de cada pago.
b) Construir la tabla de amortización correspondiente.

2 Llenar los espacios en blanco asumiendo una tasa de interés del 3% por periodo.

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				
1		750.00		19,024.32
2				
3				
4	6,725.7			
TOTAL				

3 Si la tasa de interés cobrada en un préstamo fue del 12% por periodo, llenar los espacios en blanco de la tabla de amortización.

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				3,500.00
1			1,037.22	
2				
3				
TOTAL				

4 De la tabla de amortización siguiente llenar los espacios en blanco.

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				12,000.00
1		420.00		
2				
3				
4				
TOTAL	**13,068**			

6.3 Saldo insoluto

5 Para pagar cierto artículo con un valor de $2,792, se deben efectuar 50 pagos mensuales vencidos a una tasa del 48% convertible mensualmente. Encontrar:
a) El valor de cada uno de los pagos.
b) El saldo insoluto una vez realizado el noveno pago.
c) Los intereses en el pago 20.
d) El saldo insoluto justo antes de efectuar el pago 15.
e) El abono a capital en el pago 30.

6 Una deuda de $5,293.64 se acordó en liquidarse con 18 pagos mensuales vencidos de $350 cada uno, cobrándose una tasa de interés del 1.9% mensual. Una vez que se realizó el quinto pago se decide liquidar totalmente el adeudo, por lo que, ¿cuánto es lo que se debe de pagar en ese momento para terminar con la deuda?

7 Para pagar un crédito se estipularon pagos semestrales de $5,000 y un pago final de $20,000 un semestre después del último pago regular. La tasa que se pactó fue del 30% anual. Si en este momento faltan por efectuarse 4 pagos regulares y el pago final, ¿cuál es el saldo insoluto actualmente?

8 Se sabe que para terminar de pagar un comedor se requieren de 6 pagos trimestrales vencidos de $1,750. Si se cargó una tasa de interés del 24% convertible trimestralmente, ¿a cuánto ascenderán los intereses generados en este periodo?

9 Al estar pagando una recámara y faltando 3 pagos mensuales, se han de generar por concepto de intereses $165 en el transcurso de este mes. La tasa estipulada fue del 19% anual. ¿Cuál es el valor de cada uno de los pagos?

10 En la compra de un automóvil con valor de $150,000 se dio un enganche del 40%, y se estipularon pagos mensuales de $6,700 a una tasa de interés del 1.7% mensual. Si en este momento se acaba de efectuar el quinto pago, ¿cuánto es lo que se adeuda por el carro?

11 Para pagar una computadora con valor de $18,000 se han efectuado 8 pagos mensuales vencidos de $2,100 cada uno. Si se cobra un interés del 35% anual, ¿cuál es el saldo insoluto justo antes de realizar el pago 9?

12 Un préstamo de $7,000 está siendo amortizado a través de pagos semestrales. Se sabe que la tasa de interés es del 25% semestral. Si el saldo insoluto una vez que ya se realizó el sexto pago es de $3,230, calcular el valor de cada uno de los pagos semestrales.

13 Se desea comprar una televisión con valor de $6,500. Actualmente se ofrece un plan a 12 meses cargando un interés del 20.4% convertible mensualmente. Si se decidiera optar por el plan, ¿cuál sería el primer mes en donde se amortiza más del 70% del capital?

14 Los intereses totales generados en 24 pagos mensuales por una deuda de $4,472.86 fueron de $1,143.14. Calcular el valor de cada uno de los pagos.

15 Un crédito de $944.85 está siendo pagado con pagos mensuales a una tasa del 36% convertible mensualmente. Si se sabe que los intereses generados en el pago 15 fueron de $16.47, encontrar:
a) el monto de los pagos.
b) el número de pagos necesarios para liquidar el crédito.

16 Se acordaron 20 mensualidades a una tasa del 2% mensual para pagar un refrigerador. Si el saldo insoluto al realizar el pago 11 es de $12,119.98, encontrar el valor de contado del refrigerador.

6.4 Casos más generales.

17 Una caminadora tiene un precio de $9,700 y se ofrece mediante 24 pagos quincenales anticipados a una tasa del 2.7% mensual. Calcular:
a) El valor de cada uno de los pagos.
b) El saldo insoluto una vez que se efectuó el pago 13 (método prospectivo y método retrospectivo).
c) El saldo insoluto justo antes de realizar el pago 8 (método prospectivo y método retrospectivo).
d) Los intereses que se pagan en el pago 14.

18 Para emprender un negocio propio una persona solicita un crédito de $200,000, que serán pagados con 24 pagos bimestrales donde el primero de ellos se llevará a cabo al año del préstamo. Se pacta una tasa de interés del 5.1% bimestral. Al transcurrir el tiempo la persona decide terminar de pagar el adeudo antes del vencimiento por lo que desea saber lo que tendría que pagar si:
a) acaba de realizar el pago 7 (ambos métodos).
b) está por realizar el pago 15 (ambos métodos).

19 Para liquidar un préstamo se pactaron 7 pagos semestrales de $4,200 comenzando el día de hoy. Si se acordó un interés del 14.5% semestral, calcular el saldo insoluto por los métodos prospectivo y retrospectivo al momento de efectuar el pago 4.

20 Un préstamo de $30,000 será pagado con 3 pagos anuales de $21,745.44 comenzando el primero de ellos a los 4 años. Si se cobra una tasa de interés del 17% anual, construir la tabla de amortización.

21 La siguiente tabla representa la forma de amortizar el adeudo contraído para pagar un refrigerador. Si se sabe que los pagos son mensuales y anticipados, llenar los espacios en blanco y determinar el valor de contado del refrigerador.

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0	649.27			
1		48.12		1,249.58
2				
3				0.00

22 En la siguiente tabla de amortización el primer pago se realiza en el periodo 3. Llenar los espacios en blanco.

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				
1				
2				20,993.50
3		2,099.35		16,470.01
4				
5				
6				0.00

23 De una deuda se sabe que los intereses cobrados en el pago 15 fueron de $116.47, que los pagos son semestrales de $2,300 cada uno a una tasa del 3% mensual, y que el primer pago se efectuó al año. Calcular el valor de la deuda.

24 Un préstamo de $17,438.91 debe ser pagado en tres años de la siguiente forma: 36 mensualidades de $500 cada una y además 3 pagos anuales de $2,000 cada uno, tal que cada 12 meses se deben de pagar los $500 y los $2,000 simultáneamente. Si la tasa cobrada es del 1.7% mensual:
a) Calcular el saldo insoluto una vez que ya se realizó la mensualidad 15.
b) Calcular los intereses generados en la mensualidad 19.

25 Un préstamo de $5,000 será pagado con 3 mensualidades de $1,500, $1,700 y $2,166 a una tasa de interés del 3.4% mensual. Si el primer pago se realiza al mes, elaborar la tabla de amortización.

6.5 Fondos de acumulación.

26 Para acumular $6,081.49 se realizarán 4 depósitos mensuales de $1,500 a una tasa del 10.8% convertible mensualmente. Elaborar la tabla del fondo que demuestre que se acumula dicha cantidad.

27 En el transcurso de 20 años se han realizado depósitos anuales de $34,000 acumulando en total $2,449,783. Calcular:
a) el saldo que se tenía en el fondo al realizar el quinto depósito.
b) los intereses generados en el séptimo año.

28 A partir de hoy se realizarán 4 depósitos bimestrales de $1,200 ganando una tasa del 3% bimestral. Si el retiro se llevará a cabo al año:
a) ¿cuánto es lo que se acumulará al año?
b) construir la tabla del fondo.

Problemas tipo Examen

1 Llenar los espacios en blanco:

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				
1				10,284.76
2		169.70		
3			5,184.46	
TOTAL				

2 Se está pagando de forma anual cierta maquinaria con pagos de $29,000 a una tasa de interés del 15% anual. Los intereses generados en el quinto año por el adeudo original son de $16,462.5. ¿Cuál era el precio de la maquinaria al momento de la compra?

3 Al comprar un automóvil se dio un plazo de 30 meses para pagarlo, dando un 20% de enganche. Al realizar el décimo pago se tenía un saldo insoluto de $109,187.05. Si la tasa pactada fue del 1.3% mensual, ¿cuál era el precio al contado del automóvil?

4 Un préstamo debe ser liquidado en 60 pagos bimestrales de $780 y un pago final de $10,000 a los 11 años, cobrándose una tasa del 27% convertible bimestralmente. Calcular el saldo insoluto justo antes de efectuar el pago 10.

5 Para su jubilación una persona planea realizar depósitos trimestrales de $3,200 durante 20 años. Al mes de haber hecho su último depósito trimestral piensa realizar retiros mensuales durante 10 años. Si la tasa que espera obtener durante todo el plazo es del 1% mensual:
a) calcular el valor de los retiros mensuales.
b) calcular la cantidad que se le debería pagar a dicha persona si es que al momento de realizar el vigésimo retiro, opta por que se le liquide el total de su dinero acumulado en el fondo.

CAPÍTULO **7**

ANUALIDADES CRECIENTES

7.1 Introducción.

En el capítulo 5 se trató el tema de anualidades con la particularidad de que los pagos tenían que ser constantes o nivelados. El problema de este tipo de esquemas cuando los plazos son largos y se tienen elevadas tasas de inflación es que aún cuando en términos nominales los pagos se mantienen constantes, en términos reales cada vez se paga menos. Esto se traduce en una carga fuerte en un principio para el deudor, relajándose de manera sustancial para los últimos pagos. El siguiente ejemplo muestra esta situación.

Ejemplo 7.1 En la compra de una casa con valor de $300,000 se debe dar un enganche del 30%, y el resto será financiado con pagos mensuales durante 20 años, cobrándose una tasa de interés del 24% convertible mensualmente. Calcular:

a) el valor de cada uno de los pagos.

b) el valor real de los pagos que se efectúan a los 5, 10, 15 y 20 años, si se asume una inflación anual del 10%.

a) En primer lugar tenemos que calcular la tasa efectiva mensual, que en este caso es de un 2%. Como se da un enganche del 30%, éste es por $90,000 y el financiamiento es por $210,000. Como son 20 años de pagos, se tienen 240 pagos mensuales. Planteando:

$$210,000 = X\frac{1-(1.02)^{-240}}{0.02}$$

Se asumió que los pagos son vencidos y por ser los pagos durante 20 años, el número de periodos fue de 240. Resolviendo:

$$X = 4,236.56$$

Los 240 pagos mensuales deben ser entonces de $4,236.56.

b) Para calcular los pagos reales en las fechas indicadas, lo que se debe hacer es deflactar considerando tanto la inflación, como el tiempo en los que se realizan los pagos. En particular, el valor real para el pago del año 5 es:

$$\frac{4{,}236.56}{(1.10)^5} = 2{,}630.57$$

El valor real disminuye considerablemente en el transcurso de 5 años. Para el pago del año 10 tenemos:

$$\frac{4{,}236.56}{(1.10)^{10}} = 1{,}633.33$$

El valor real en este caso es casi una tercera parte del valor nominal. El valor real del pago en el año 15 sería:

$$\frac{4{,}236.56}{(1.10)^{15}} = 1{,}014.20$$

Finalmente, el valor real del pago en el año 20 es:

$$\frac{4{,}236.56}{(1.10)^{20}} = 629.74$$

Como podemos observar, el efecto de la inflación combinado con plazos grandes, hace que el valor real del dinero disminuya en cantidades sorprendentes; basta resaltar el hecho de que el valor real del pago a los 20 años ($629.74) representa menos del 15% ($4,236.56). A continuación se realizará un pequeño análisis del significado práctico de los resultados obtenidos en este ejercicio.

Sabemos que una casa de $300,000 puede ser considerada como una casa de interés social, que en principio debería estar al alcance de gente con preparación profesional; sin embargo, la realidad es que muy pocas personas se pueden dar el lujo de pagar un enganche de $90,000 y posteriormente cubrir mensualidades de $4,236.56, sobre todo si aplicamos la regla común de que para acceder a un crédito hipotecario se debe tener un salario 3 veces mayor a la renta estipulada, que en este caso sería de $12,709.70.

Pensando en un recién egresado, por ejemplo, su salario es bajo, en principio, por la falta de experiencia laboral. En la medida que la va adquiriendo y logra escalar a mejores puestos, su salario se va incrementando. Este proceso, obviamente, requiere de un tiempo generalmente considerable durante el cual no ha podido acceder a un crédito, porque contrariamente a sus expectativas de crecimiento salarial donde éste irá en aumento, las mensualidades que tiene que pagar en términos reales irán disminuyendo. Es decir, se castiga mucho al acreditado en un principio que es cuando menos gana y se le relaja al final donde paradójicamente es cuando se espera reciba un mayor salario.

Del ejemplo anterior se ve claramente que el principal problema que tiene una anualidad con pagos fijos o nivelados, es que para plazos largos el valor real de los pagos disminuye considerablemente, "castigando" al deudor en las primeras rentas, y "liberándolo" al final del plazo.

Para dar respuesta a este problema se idearon anualidades que en términos nominales vayan aumentando, de acuerdo a ciertos patrones predefinidos, para que no exista una desproporción en términos reales entre los primeros y los últimos pagos. Las anualidades con crecimiento que se analizarán en este libro serán con un crecimiento geométrico.

7.2 Anualidades que crecen como progresión geométrica.

Las anualidades que crecen como progresión geométrica, tienen la característica de que los pagos conforme transcurre el tiempo se van incrementando, siendo los primeros pagos más pequeños en comparación con los últimos. Debe quedar claro que ahora los pagos ya no son constantes y que periodo a periodo éstos se van a ir aumentando de acuerdo a una regla.

Las anualidades creciendo como progresión geométrica tienen la característica de que los pagos se irán incrementando conforme a un factor. Para mostrar el patrón de crecimiento se tiene el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7.2 Determínese el patrón de crecimiento para 5 pagos anuales si es que éstos crecen en un 20% anual y el primero de ellos es por $1,000.

En este caso tenemos que el primer pago, denotado por $X_{1,}$ es de $1,000, y el segundo debe experimentar un crecimiento del 20% con respecto a éste. Si se denota por g el crecimiento el segundo pago sería:

$$X_2 = X_1(1+g) = 1{,}000(1.2) = 1{,}200$$

El tercer pago se obtiene al aumentarle un 20% a los $1,200 quedando:

$$X_3 = X_2(1+g) = 1{,}200(1.2) = 1{,}440$$

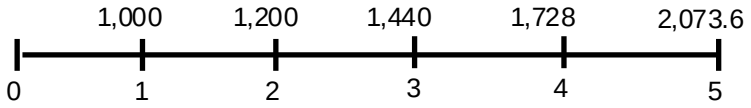
El cuarto pago se obtiene a partir de los $1,440:

$$X_4 = X_3(1+g) = 1{,}440(1.2) = 1{,}728$$

Finalmente, el quinto pago sería:

$$X_5 = X_4(1+g) = 1{,}728(1.2) = 2{,}073.6$$

De esta forma el diagrama de tiempo para los 5 pagos quedaría:



La característica de una anualidad que crece como una progresión geométrica, es que cada pago se obtiene de multiplicar el inmediato anterior por el factor de crecimiento (1+g). Ahora bien, cada uno de los pagos se puede calcular directamente del primer pago, sin necesidad de calcular los anteriores. Por ejemplo, para el tercer pago se han experimentado ya 2 crecimientos, por lo que calculando directamente a partir de los $1,000 se tendría:

$$X_3 = X_1(1+g)^2 = 1{,}000(1.2)^2 = 1{,}440$$

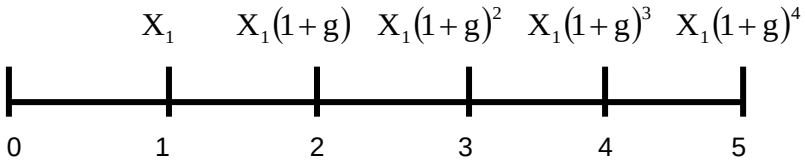
Para el pago cuatro, se han experimentado 3 creciemientos, por lo que calculándolo directamente:

$$X_4 = X_1(1+g)^3 = 1{,}000(1.02)^3 = 1{,}728$$

Finalmente, para el quinto pago, se han experimentado 4 crecimientos, quedando:

$$X_5 = X_1(1+g)^4 = 1{,}000(1.2)^4 = 2{,}073.6$$

El diagrama de tiempo donde cada pago se expresa en función del primero quedaría:



Cabe resaltar que el primer pago no tiene crecimiento, que el segundo tiene un crecimiento, que el tercer pago tiene 2 crecimientos, etc, es decir, el pago efectuado en "n" tendrá "n - 1" crecimientos.

Ejemplo 7.3 Se realizarán 20 pagos mensuales, los cuales crecerán a razón del 3% mensual siendo el primer pago de $3,700. Calcular:

a) el pago que se efectúa en el mes 10.
b) el pago que se efectúa en el mes 20.

a) Para calcular el pago 10, como se vio en el ejemplo 7.2, no es necesario calcular los pagos hasta el mes 9, sino que directamente, a partir de los $3,700 y considerando que en el mes 10 sólo se han experimentado 9 crecimientos, se tendría el siguiente planteamiento:

$$X_{10} = X_1(1+g)^9 = 3{,}700(1.03)^9 = 4{,}827.66$$

b) Para el pago en el mes 20 se han experimentado sólo 19 crecimientos quedando:

$$X_{20} = X_1(1+g)^{19} = 3{,}700(1.03)^{19} = 6{,}487.97$$

De los ejemplos 7.2 y 7.3 se pueden obtener algunas conclusiones interesantes de los pagos creciendo como progresión geométrica:

- Los pagos periodo a periodo van cambiando conforme a un factor (1+g).

- Cualquier pago se puede poner en función del primero, en particular, el pago n estaría dado por:

$$X_n = X_1(1+g)^{n-1}$$

- Si el factor de crecimiento "g" fuera igual a cero, entonces se tendrían pagos constantes como los estudiados en el capítulo 5.

- Aunque en los ejemplos se manejaron pagos que iban aumentando, se pueden tener pagos que vayan disminuyendo siempre y cuando, la tasa de crecimiento fuera negativa. Este caso no se analizará para fines de anualidades, ya que en la práctica no es común que los primeros pagos sean elevados y los últimos sean bajos.

La idea que hay detrás de una anualidad creciente es que los pagos vayan incrementándose en términos nominales, pero que en términos reales se mantengan hasta cierto punto estables, de tal forma que cueste el mismo trabajo para el deudor pagar el primer pago ó el último.

Los supuestos que se tienen para anualidades creciendo como progresión geométrica son:

1 La tasa de interés permanece constante para todo el plazo de pagos.

2 Debe existir correspondencia entre la tasa de interés y los pagos como en las anualidades tradicionales.

3 La tasa de crecimiento debe ser constante para todo el plazo. Esto no significa que los pagos sean constantes.

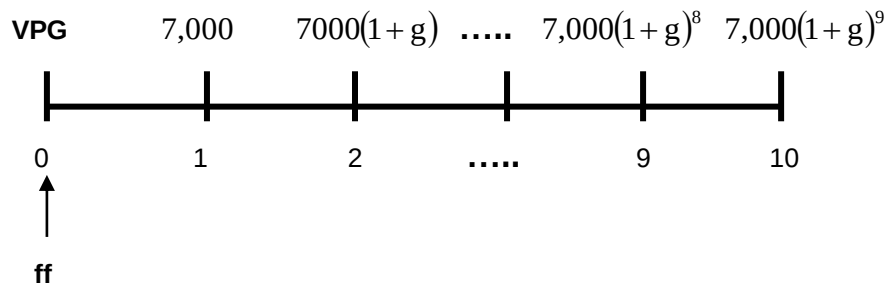
4 Debe existir correspondencia entre la periodicidad de los pagos y el crecimiento. En caso de que no haya correspondencia se tiene que encontrar el crecimiento equivalente a la periodicidad de los pagos.

5 Igualmente que en las anualidades tradicionales, **el valor presente de la anualidad creciente se evaluará un periodo antes del primer pago.**

Habiendo establecido los supuestos de la anualidad, abordaremos directamente un caso para mostrar el procedimiento para calcular el valor presente de la misma.

Ejemplo 7.4 Calcular el valor presente de 10 pagos anuales cuyo primer pago es por $7,000 e irán creciendo a razón del 7% anual. Considerar una tasa de interés del 15%.

Se asumirá de aquí en adelante, salvo que se diga lo contrario, que el crecimiento será constante. En este caso g=7% e i=15%. Realizando un diagrama de tiempo se tiene:



Como se sabe, para calcular el valor presente se tienen que "regresar" todos y cada uno de los pagos a la fecha donde se ha de calcular el valor presente, que como siempre es un periodo antes del primer pago. El primer pago se regresa un periodo, el segundo dos, y así sucesivamente hasta llegar al pago 10. Representando el valor presente de la anualidad creciente como VPG se tiene:

$$VPG = \frac{7,000}{(1+i)} + \frac{7,000(1+g)}{(1+i)^2} + ... + \frac{7,000(1+g)^8}{(1+i)^9} + \frac{7,000(1+g)^9}{(1+i)^{10}} \quad \text{.... } \mathbf{1}$$

Para encontrar el valor presente bastaría con sustituir los valores de "i" y de "g", cosa que resultaría demasiado compleja entre mayor número de pagos se tengan. Para calcular el valor presente se puede utilizar un artificio matemático

donde se multiplica el lado izquierdo y derecho de la ecuación **1,** por el factor (1+i), y se divide entre el factor (1+g). Nótese que al realizar operaciones, a los sumandos del lado derecho de la ecuación se les irán disminuyendo un grado tanto al factor (1+i) en el denominador, como al factor (1+g) en el denominador, quedando:

$$\text{VPG}\,\frac{(1+\text{i})}{(1+\text{g})} = \frac{7{,}000}{(1+\text{g})} + \frac{7{,}000}{(1+\text{i})} + \ldots\ldots + \frac{7{,}000(1+\text{g})^{7}}{(1+\text{i})^{8}} + \frac{7{,}000(1+\text{g})^{8}}{(1+\text{i})^{9}} \quad \ldots\ \textbf{2}$$

Como se puede observar, las ecuaciones 1 y 2 son semejantes por lo que si restamos la ecuación 1 de la ecuación 2 se eliminarían casi todos los términos. Restando entonces las ecuaciones y eliminando los términos semejantes tenemos:

$$\text{VPG}\,\frac{(1+\text{i})}{(1+\text{g})} = \frac{7{,}000}{(1+\text{g})} - \frac{7{,}000(1+\text{g})^{9}}{(1+\text{i})^{10}} \quad \ldots\ \textbf{2-1}$$

Reexpresando:

$$\text{VPG}\left[\frac{(1+\text{i})-(1+\text{g})}{(1+\text{g})}\right] = 7{,}000\left[\frac{1}{(1+\text{g})} - \frac{(1+\text{g})^{9}}{(1+\text{i})^{10}}\right]$$

Equivalentemente tenemos al despejar VPG:

$$\text{VPG} = 7{,}000\left[\frac{1+\text{g}}{\text{i}-\text{g}}\right]\left[\frac{1}{(1+\text{g})} - \frac{(1+\text{g})^{9}}{(1+\text{i})^{10}}\right]$$

Finalmente queda:

$$\text{VPG} = 7{,}000\,\frac{\left[1-\left(\frac{1+\text{g}}{1+\text{i}}\right)^{10}\right]}{\text{i}-\text{g}}$$

Esta es una ecuación más simple donde ya podemos sustituir y calcular el valor presente. Resolviendo:

$$\text{VPG} = 7{,}000\,\frac{\left[1-\left(\frac{1.07}{1.15}\right)^{10}\right]}{0.15-0.07} = 44{,}953.15$$

El valor presente de los 10 pagos crecientes es de $44,953.15

Del ejemplo 7.4 se obtuvo la siguiente expresión para calcular el valor presente de una anualidad creciente:

$$VPG = 7{,}000\frac{\left[1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{10}\right]}{i-g}$$

Nótese que a diferencia de las anualidades con pagos iguales, ahora el valor presente se denota por VPG para diferenciar unas de otras. Sabiendo que los $7,000 son el primer pago y que 10 era el número de pagos, podemos generalizar la ecuación para cualquier pago y cualquier "n" quedando:

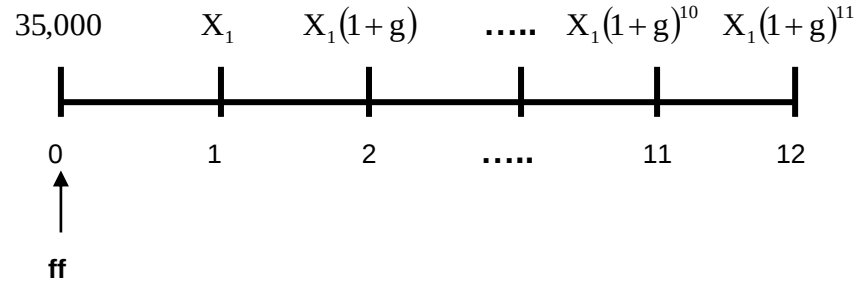
$$VPG = X_1\frac{\left[1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{n}\right]}{i-g} \qquad \textbf{7.1}$$

Donde:

VPG	:	valor presente de todos los pagos crecientes, evaluada un periodo antes del primer pago.
$\mathbf{X_1}$	:	valor del primer pago.
i	:	tasa efectiva de interés por periodo de pago.
g	:	tasa de crecimiento de los pagos.
n	:	número de pagos que se evalúan a valor presente.

Ejemplo 7.5 Se prestan $35,000 para pagarse a 12 meses a una tasa del 30% convertible mensualmente. Si los pagos tendrán un crecimiento del 1% mensual, calcular el primer y el último pago.

La tasa de interés efectiva mensual que se cobra es del 2.5%. Graficando se tiene:



De la ecuación 7.1 tenemos:

$$VPG = X_1 \frac{\left[1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n\right]}{i-g}$$

Sustituyendo valores:

$$35{,}000 = X_1 \frac{\left[1-\left(\frac{1.01}{1.025}\right)^{12}\right]}{0.025-0.01}$$

Realizando operaciones y despejando el primer pago:

$$X_1 = 3{,}237.89$$

Como se muestra en el diagrama, el pago 12 experimenta 11 crecimientos, por lo que el último pago quedaría expresado como:

$$X_{12} = X_1(1+g)^{11} = 3{,}237.89(1.01)^{11} = 3{,}612.41$$

El siguiente ejemplo pretende mostrar la diferencia que existe entre una anualidad con pagos fijos y otra con pagos crecientes, sobre todo cuando el número de pagos es elevado. Se tomará como referencia el ejemplo 7.1.

Ejemplo 7.6 En la compra de una casa con valor de $300,000 se debe dar un enganche del 30%, y el resto será financiado con pagos mensuales durante 20 años, cobrándose una tasa de interés del 24% convertible mensualmente. Calcular el valor del primer y del último pago si:

a) los pagos son nivelados como en el ejemplo 7.1

b) los pagos crecen a razón del 1% mensual.

a) Si los pagos son fijos, ya se calculó que todos y cada uno de los pagos deben de ser:

$$X = 4{,}236.56$$

b) Si los pagos son crecientes, y dado que se están financiando $210,000, ya que se dió un enganche del 30% se tiene:

$$210{,}000 = X_1 \frac{\left[1-\left(\frac{1.01}{1.02}\right)^{240}\right]}{0.02-0.01}$$

Despejando el primer pago:

$$X_1 = 2{,}317.86$$

Y el último pago sería:

$$X_{240} = X_1(1+g)^{239} = 2{,}317.86(1.01)^{239} = 24{,}997.43$$

La diferencia entre las anualidades es obvia; mientras que en la de pagos fijos se empieza con una mensualidad grande de $4,236.56, en la de pagos crecientes se empieza con una de $2,317.85, que es casi un 45% más baja que la primera.

Como en ambas se cobra un 2% mensual, la anualidad creciente debe compensar las mensualidades bajas que se pagan en un principio, por lo que las últimas deben ser considerablemente superiores. En este caso, la última mensualidad alcanza un valor nominal de $24,997.43, que parecería, cuando menos en principio, ser muy alto, pero recordemos que este pago se efectuará en 20 años por lo que ya se habrá experimentado una pérdida de poder adquisitivo considerable. Si suponemos una inflación del 10% anual se tendría que el valor real del pago a los 20 años sería:

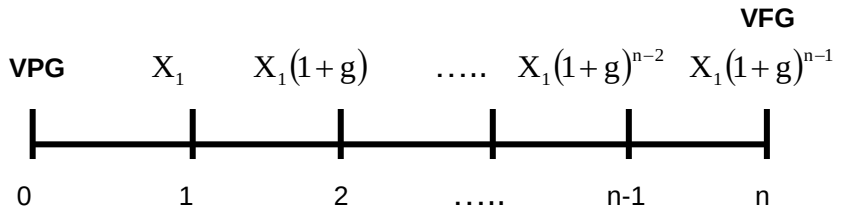
$$\frac{24{,}997.43}{(1.10)^{20}} = 3{,}715.7$$

Este pago es todavía inferior en términos reales al primer pago de la anualidad con pagos constantes.

Por lo anterior, podemos concluir que una anualidad creciente permite tener mensualidades bajas en un principio, y darle la facilidad al deudor de hacerse de un bien "caro", y aunque las mensualidades se vayan incrementando con el tiempo en términos nominales, en términos reales se puede mantener sin grandes cambios.

Hemos considerado hasta ahora el valor presente de una anualidad creciente, pero también podemos analizar su valor futuro. Si nos apoyamos en la figura 7.1, donde se muestran simultáneamente el valor presente y el valor futuro de la serie de pagos crecientes, es claro que el valor futuro se puede obtener directamente de acumular n periodos el valor presente.

FIG. 7.1



De acuerdo a la figura 7.1, el valor futuro se evalúa al momento de realizar el último pago o depósito. De esta forma:

$$VFG = VPG(1+i)^n$$

Es importante notar que siempre que hablemos de acumular o traer a valor presente, se debe utilizar la tasa de interés y no la de crecimiento, ya que deseamos saber cuánto vale una cantidad en otro momento; esto nos lo da la tasa de interés. Sustituyendo la fórmula de valor presente tenemos:

$$VFG = VPG(1+i)^n = X_1 \frac{\left[1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n\right]}{i-g}(1+i)^n$$

Multiplicando cada uno de los elementos del numerador se tiene la fórmula final del valor futuro:

$$VFG = X_1 \frac{\left[(1+i)^n-(1+g)^n\right]}{i-g} \qquad \textbf{7.2}$$

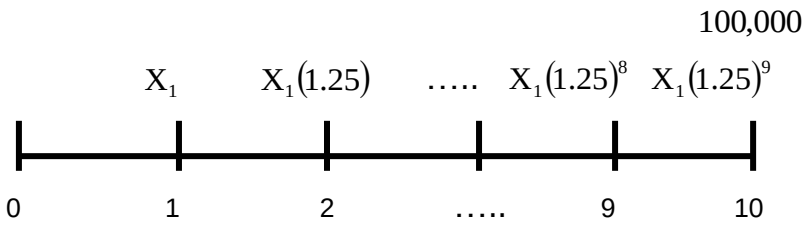
Donde:

VFG	:	valor futuro de todos los pagos crecientes, evaluados al momento de efectuar el último pago ó depósito.
X_1	:	valor del primer pago ó depósito
i	:	tasa efectiva de interés por periodo de pago.
g	:	tasa de crecimiento de los pagos.
n	:	número de pagos que se evalúan al momento de efectuar.el último pago.

Es importante notar que **las ecuaciones de valor futuro y de valor presente, están en función siempre del primer pago.**

Ejemplo 7.7 A través de un fondo una persona desea acumular dentro de 10 años $100,000, donde el fondo le ofrece un interés del 12% anual. Si desea incrementar sus pagos en un 25% cada año y realizará 10 depósitos, ¿de cuánto debe ser el primer depósito para que al momento de realizar el último, se acumule dicha cantidad?

El diagrama de tiempo se representaría de la siguiente forma:



Utilizando la fórmula de valor futuro:

$$VFG = X_1 \frac{\left[(1+i)^n - (1+g)^n\right]}{i-g}$$

Sustituyendo valores:

$$100{,}000 = X_1 \frac{\left[(1.12)^{10} - (1.25)^{10}\right]}{0.12 - 0.25}$$

Aunque el denominador es negativo, el numerador también lo es, por lo que al efectuar la división, el resultado termina siendo positivo. De tal forma que la ecuación funciona aún y cuando la tasa de crecimiento es mayor que la tasa de interés. Resolviendo:

$$X_1 = 2{,}094.28$$

El primer depósito sería de $2,094.28 y se puede ver que el último debería ser de:

$$X_{10} = 2{,}094.28(1.25)^9 = 19{,}504.52$$

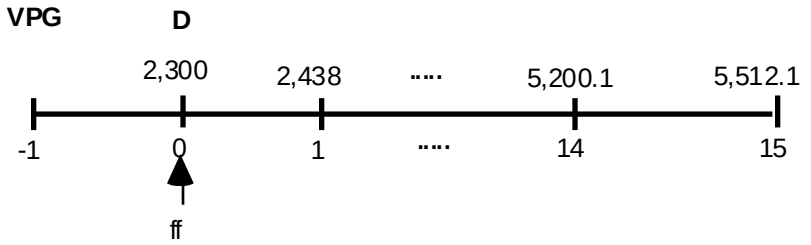
7.3 Casos más generales de anualidades creciendo como progresión geométrica.

En esta sección se considerarán diferentes esquemas de pago en donde el planteamiento se torna un poco más complejo, tal es el caso de pagos anticipados, diferidos o perpetuos.

El siguiente ejemplo muestra como deben ser tratados pagos anticipados:

Ejemplo 7.8 Calcular el valor presente de 16 pagos trimestrales anticipados a una tasa de interés del 5% trimestral, donde los pagos experimentan un crecimiento del 6% trimestral. El primer pago es por $2,300.

El diagrama podría ser:



Nótese que el valor presente de la anualidad estaría evaluado en menos uno porque el primer pago está en cero. Como se estableció en el capítulo cinco, la letra "D" denota el valor de la anualidad en la fecha focal indicada. Planteando:

$$D = VPG(1+i)$$

Sustituyendo la fórmula de valor presente con los valores correspondientes:

$$D = 2{,}300\frac{\left[1-\left(\frac{1.06}{1.05}\right)^{16}\right]}{0.05-0.06}(1.05)$$

Como se vio en el ejemplo anterior, aunque la tasa de crecimiento sea mayor que la tasa de interés, el resultado es positivo porque tanto el numerador como el denominador son negativos. Resolviendo parcialmente:

$$D = 2{,}300\frac{-0.16376}{-0.01}(1.05)$$

Finalmente se tiene que el valor presente al día de hoy es:

$$D = 39{,}549.09$$

No importa para el valor presente de una anualidad creciente como progresión geométrica que la tasa de crecimiento sea superior a la tasa de interés. La fórmula puede ser aplicada, solo hay que tener cuidado con los signos.

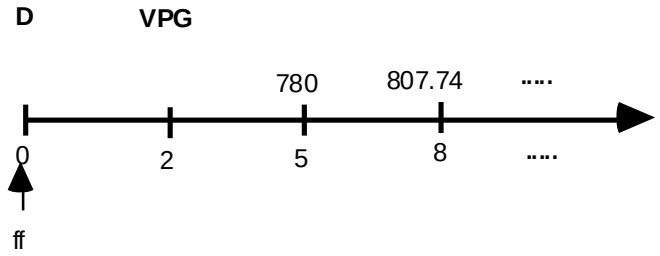
En el siguiente ejemplo se exponen pagos diferidos y el problema de que la tasa de crecimiento no corresponde con la periodicidad de los pagos.

Ejemplo 7.9 Al comprar una computadora se pactan 18 pagos trimestrales donde el primero de ellos se debe realizar a los 5 meses. Si se cobra una tasa de interés del 9% trimestral y los pagos crecerán de manera trimestral pero a razón del 15% anual, calcular el valor de contado de la computadora, asumiendo un primer pago de $780.

En este caso no hay correspondencia de la tasa de crecimiento con la forma de efectuar los pagos, por lo que se debe calcular una tasa de crecimiento equivalente. Recordando tasas equivalentes en interés compuesto, la tasa trimestral sería:

$$g_t = (1.15)^{1/4} - 1 = 0.0356$$

Un crecimiento del 15% anual es análogo a un crecimiento del 3.56% trimestral. Graficando:



Como nos interesa el valor presente sólo es necesario graficar los primeros pagos, ya que no es de interés en dónde se terminan. En el diagrama se representa el tiempo en meses, por lo que el primer pago se encuentra en 5, y el valor presente estaría evaluado en el mes 2, por ser los pagos trimestrales. El valor calculado debe ser regresado 2 meses para colocarlo en la fecha focal.

$$D = VPG(1+i)^{-2/3}$$

Sustituyendo valores:

$$D = 780\,\frac{\left[\frac{1-(1.0356)^{18}}{1.09}\right]}{0.09-0.0356}(1.09)^{-2/3} = 8{,}148.62$$

Los siguientes ejemplos mostrarán la forma de calcular tanto la tasa de interés como la tasa de crecimiento utilizando interpolación.

Ejemplo 7.10 Un crédito de $150,000 deberá ser pagado con 60 pagos mensuales. El primero será de $2,500 y los siguientes experimentarán un crecimiento mensual del 0.9%. Calcular la tasa de interés que se cobró.

Recordando del capítulo 5 sección 9, que para calcular la tasa de interés se puede utilizar interpolación lineal; para ello se deben proponer por tanteo tasas de interés como se describe a continuación.

De acuerdo a los datos del problema, la tasa de interés debe cumplir la siguiente relación:

$$150{,}000 = 2{,}500\frac{\left[1-\left(\frac{1.009}{1+\mathrm{i}}\right)^{60}\right]}{\mathrm{i}-0.009}$$

Si suponemos que la tasa de interés es del 1% mensual tenemos:

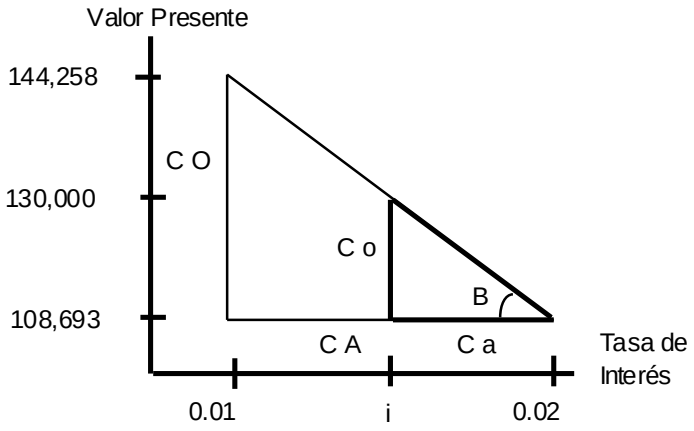
$$2{,}500\frac{\left[1-\left(\frac{1.009}{1.01}\right)^{60}\right]}{0.01-0.009}=144{,}258.92$$

En este caso el valor presente que se obtiene con la tasa de interés del 1% es muy alto, por lo que la tasa de interés debe ser mayor. Si suponemos una tasa de interés del 2% tenemos:

$$2{,}500\frac{\left[1-\left(\frac{1.009}{1.02}\right)^{60}\right]}{0.02-0.009}=108{,}693.94$$

Como se puede observar ya se tienen los valores de la tasa de interés que hacen que sus valores presentes estén por debajo y por encima del deseado.

Graficando tenemos:



Se debe cumplir entonces:

$$\frac{Ca}{Co} = \frac{CA}{CO}$$

Sustituyendo:

$$\frac{0.2 - i}{130{,}000 - 108{,}693.94} = \frac{0.02 - 0.01}{144{,}258.92 - 108{,}693.94}$$

Donde:

$$i = 0.014$$

La tasa mensual que se obtiene a través de la interpolación es del 1.4%. La tasa que realmente se cobra es del 1.3548%.

Para el caso en que la incógnita sea el crecimiento, se utiliza un proceso análogo al de la tasa de interés, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.11. Para liquidar una deuda de $20,000 se harán 5 pagos trimestrales creciendo en un porcentaje constante. El primer pago será de $3,000 y la tasa de interés que se cobra es del 2% mensual. Calcular el crecimiento del pago para pagar el adeudo.

Como la tasa es mensual y los pagos son trimestrales, la tasa debe ser convertida; por lo que se tiene:

$$i_t = (1.02)^3 - 1 = 0.0612$$

Teniendo la tasa trimestral podemos calcular el porcentaje de crecimiento de la siguiente ecuación:

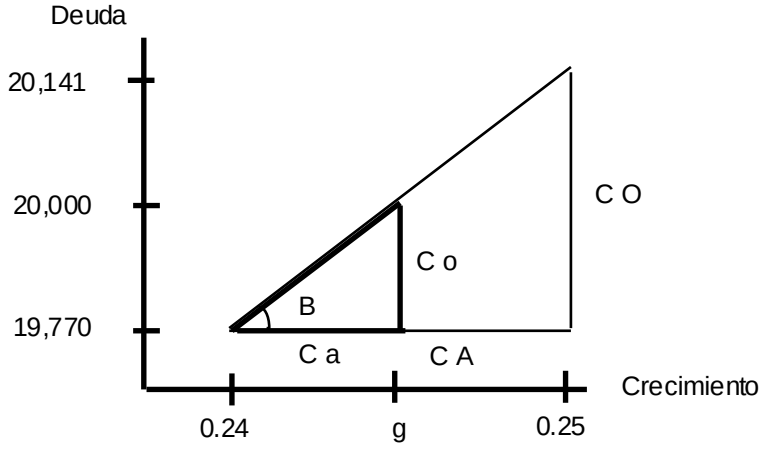
$$20{,}000 = 3{,}000\frac{\left[1-\left(\frac{1+g}{1.0612}\right)^{5}\right]}{0.0612-g}$$

Donde g representa el crecimiento. Como g no se puede despejar se procede a realizar la interpolación. Supongamos un crecimiento del 20% para empezar. Con esto se obtiene:

$$3{,}000\frac{\left[1-\left(\frac{1.2}{1.0612}\right)^{5}\right]}{0.0612-0.2} = 18{,}348.14$$

En este caso se debe buscar un crecimiento del pago tal que se cubra una deuda de $20,000. Con el crecimiento del 20% trimestral, no se alcanza a cubrir la deuda por lo que éste debe ser mayor. En la siguiente tabla se muestran diferentes valores de la deuda para los correspondientes crecimientos del pago:

Crecimiento	Valor presente
20%	$18,348.14
23%	$19,405.19
24%	**$19,770.02**
25%	**$20,141.23**



Se cumple entonces:

$$\frac{Ca}{Co} = \frac{CA}{CO}$$

Sustituyendo:

$$\frac{g - 0.24}{20{,}000 - 19{,}700} = \frac{0.25 - 0.24}{20{,}141 - 19{,}770}$$

Donde:

$$g = 0.2462$$

De esta forma, el crecimiento experimentado por los pagos debe ser del 24.62% para liquidar completamente la deuda de $20,000.

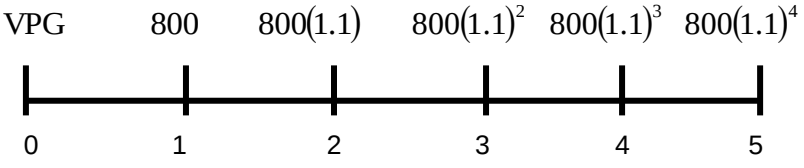
Hasta ahora hemos visto ejemplos donde la tasa de crecimiento es diferente a la tasa de interés. Cuando i=g ya no se puede usar la fórmula de valor presente y se tiene que encontrar una nueva expresión para este caso. Véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.12. Calcular el valor presente de 5 pagos anuales donde el primer pago es de $800, y los siguientes pagos experimentan un crecimiento del 10%. La tasa de interés es del 10%.

En principio podríamos utilizar la fórmula de valor presente para anualidades crecientes, por lo que se tendría:

$$VPG = 800\frac{\left[1 - \left(\frac{1.10}{1.10}\right)^{5}\right]}{0.10 - 0.10} = 800\frac{0}{0}$$ **¡INDEFINIDO!**

Como se puede apreciar la fórmula de valor presente no funciona para el caso en que g=i, por lo que se debe encontrar un mecanismo para calcular el valor presente. Si graficamos los pagos estos serían:



Para calcular el valor presente de la perpetuidad se deben traer a valor presente todos y cada uno de los pagos. En este caso la ecuación sería:

$$VPG = \frac{800}{(1.1)} + \frac{800(1.1)}{(1.1)^2} + \frac{800(1.1)^2}{(1.1)^3} + \frac{800(1.1)^3}{(1.1)^4} + \frac{800(1.1)^4}{(1.1)^5}$$

Como el factor de crecimiento del pago es el mismo que el factor de descuento de la tasa de interés, los factores se anulan entre sí y queda:

$$VPG = \frac{800}{(1.1)} + \frac{800}{(1.1)} + \frac{800}{(1.1)} + \frac{800}{(1.1)} + \frac{800}{(1.1)} = (5)\frac{(800)}{(1.1)}$$

Finalmente, el valor presente de los pagos sería:

$$VPG = 3{,}636.36$$

Del ejemplo 7.12 podemos entonces generalizar el valor presente de una anualidad creciente cuando la tasa de interés es igual a la tasa de crecimiento. Para dicho ejemplo tuvimos:

$$VPG = (5)\frac{(800)}{(1.1)}$$

Generalizando el resultado anterior, tenemos que el valor presente de una anualidad creciente como progresión geométrica, cuando i=g es:

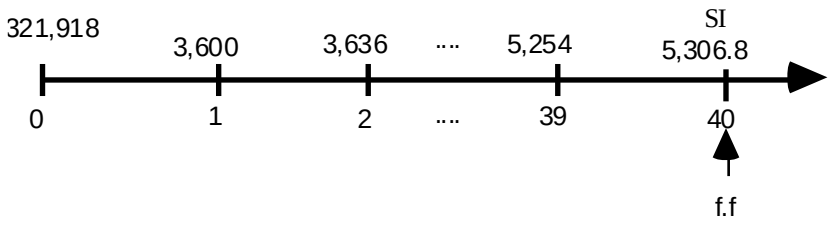
$$VPG = \frac{nX_1}{1+i} \qquad \textbf{7.3}$$

Donde:

- **VPG** : valor presente de todos los pagos crecientes, evaluados un periodo antes del primer pago.
- **X_1** : valor del primer pago.
- **i** : tasa efectiva de interés por periodo de pago.
- **n** : número de pagos que se evalúan a valor presente.

Ejemplo 7.13 Por una deuda de $321,918.24 se deben realizar 120 pagos mensuales creciendo a razón del 1% mensual. Se sabe que el primer pago es de $3,600, y que la tasa de interés que se cobra es del 18% convertible mensualmente. Calcular el saldo insoluto una vez que se realizó el pago 40 por los métodos retrospectivo y prospectivo.

Para el método retrospectivo el diagrama podría quedar como sigue:



En el capítulo 6 se vio que el saldo insoluto (SI) calculado por el método retrospectivo era la deuda menos los pagos realizados, todo evaluado en el momento de calcular el saldo insoluto. Para este caso se tiene que llevar la deuda 40 meses, y restarle el valor futuro de los 40 pagos. Planteando con una tasa de interés del 1.5% mensual:

$$\mathrm{SI} = 321{,}918.24(1.015)^{40} - 3{,}600\frac{\left[(1.015)^{40} - (1.01)^{40}\right]}{0.015 - 0.01}$$

Resolviendo:

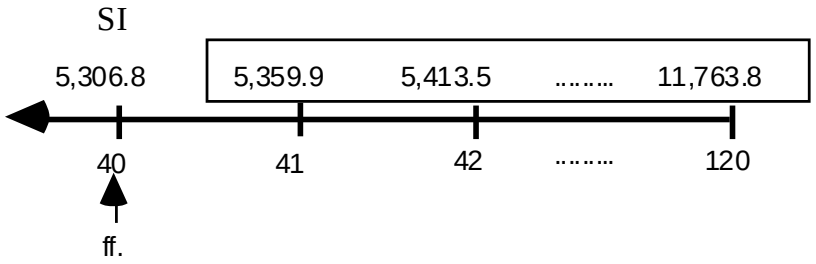
$$\mathrm{SI} = 349{,}854.24$$

Es de sorprenderse que el saldo insoluto sea mayor que la deuda misma, pero el análisis de este resultado lo pospondremos hasta después de haber calculado el saldo insoluto con el método prospectivo. Hay que notar en el planteamiento del método retrospectivo, que a pesar de que se utiliza un valor futuro, el valor del pago que se maneja es el correspondiente al del primer pago.

Para el método prospectivo nos interesa sólo lo que nos falta por pagar. Aquí hay que tener cuidado porque como la anualidad es creciente y como los pagos que nos restan son los del mes 41 en adelante, nuestro "primer pago" ya no es de $3,600. Por ser una anualidad creciente el pago 41 ha experimentado 40 crecimientos del 1%. De esta manera el pago 41 es:

$$X_{41} = 3{,}600(1.01)^{40} = 5{,}359.91$$

Para calcular el saldo insoluto de manera prospectiva nos podemos apoyar en la siguiente gráfica:



El saldo insoluto es el valor presente de todos los pagos que faltan, que en este caso está dado por los pagos encerrados en el rectángulo.

De hecho es una anualidad creciente cuyo primer pago es de $5,359.91 y que tiene 80 pagos. De esta forma el saldo insoluto es:

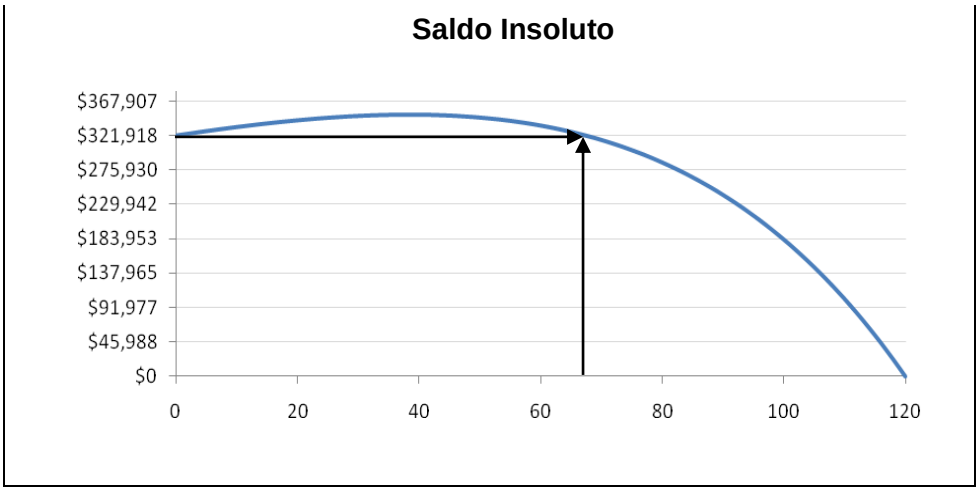
$$SI = 5{,}359.91\frac{\left[1-\left(\frac{1.01}{1.015}\right)^{80}\right]}{0.015-0.01} = 349{,}854.24$$

En ambos casos el saldo insoluto es el mismo. Ahora bien, la razón de que el saldo insoluto sea mayor que la deuda en una anualidad creciente es porque como los primeros pagos son pequeños, ni siquiera llegan a cubrir los intereses, por lo que en vez de disminuir el capital, este se va incrementando.

Como muestra consideremos los intereses del primer periodo de la deuda, ya que la deuda es por $321,918.24 y la tasa de interés es del 1.5% mensual, los intereses del primer mes serían:

$$I = 321{,}918.24(0.015) = 4{,}828.77$$

El primer pago es por $3,600 por lo que en vez de disminuir la deuda ésta aumenta en $1,228.77. Para los primeros meses, el pago entonces será menor que los intereses y la deuda se incrementará. En la medida que el pago crece es que se llega a pagar más que los intereses cobrados y es cuando observamos que el saldo comienza a disminuir. Para este caso particular no es sino hasta el mes 68 en que el saldo insoluto es menor que la deuda original. En la siguiente gráfica se muestra el comportamiento del saldo insoluto para los 120 meses.



Para anualidades crecientes cuando el número de pagos es grande, el saldo insoluto generalmente aumenta en los primeros periodos, y posteriormente comienza a disminuir hasta llegar a tener el valor de cero, al terminar el plazo.

7.4 Perpetuidades

Una perpetuidad es un caso particular de una anualidad cuando el número de pagos es muy grande. De hecho, se pueden seguir utilizando las fórmulas de valor presente, pero hay que tener cuidado con la magnitud de la tasa de crecimiento.

Vamos a analizar tres casos; el primero de ellos es cuando la tasa de crecimiento es igual a la tasa de interés: **i = g**. Como se vio en la sección anterior, la fórmula para el valor presente cuando la tasa de interés es igual a la tasa de crecimiento es:

$$VPG = \frac{nX_1}{1+i}$$

Como en una perpetuidad los pagos son infinitos y n tiende a ser muy grande, entonces el valor presente de una perpetuidad no puede ser calculado cuando i=g. Al tener n un valor muy grande, al multiplicarlo por cualquier valor, el resultado es un valor muy grande y se dice que **el valor presente de una perpetuidad es infinito o diverge cuando i = g y no puede ser calculado.**

El segundo caso lo tenemos cuando **i < g**. Si recordamos la fórmula de valor presente de una anualidad tenemos:

$$VPG = X_1 \frac{\left[1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n\right]}{i-g}$$

Si i < g entonces el término $\frac{1+g}{1+i}$ es mayor que 1, y al elevarlo a cualquier número entero positivo mayor que 1, se va a haciendo más grande. Para la Tabla 7.1 se tomaron valores de i = 1% y para g = 1.2%. Nótese que conforme crece el valor de "n" el valor de la expresión $\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n$ crece de manera exponencial.

Tabla 7.1

n	$\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n$
1	1.002
20	1.040
50	1.104
100	1.22
1,000	7.23
2,000	52.27
5,000	19,756
10,000	390,289,809

Como se puede apreciar, en el caso en que **i < g** se tiene que al ser n muy grande, el término $\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n$ se hace muy grande, y nuevamente **el valor presente es muy grande o diverge, y no puede ser calculado**.

El tercer y último caso se tiene cuando **i > g**. En esta ocasión veremos que el valor presente sí puede ser calculado, ya que el término $\frac{1+g}{1+i}$ es menor que 1, y al ser elevado a un número entero positivo el resultado irá disminuyendo conforme aumente el valor del exponente. Obsérvese en la tabla 7.2 como va disminuyendo el valor de $\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n$ cuando i = 1.1% y g = 1%.

Tabla 7.2

n	$\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n$
1	0.9990109
100	0.9057781
1,000	0.3717219
10,000	0.0000504
30,000	0.0000000000001

Ahora, al aumentar el valor de n, el término $\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n$ se va haciendo muy pequeño, por lo que en una perpetuidad, dicha expresión se vuelve cero. Por lo tanto, el valor presente de una perpetuidad sólo se puede calcular cuando **i > g** y es:

$$VPPG = \frac{X_1}{i-g} \qquad \textbf{7.4}$$

Donde:

VPPG : valor presente de una perpetuidad de todos los pagos crecientes, evaluados un periodo antes del primer pago.

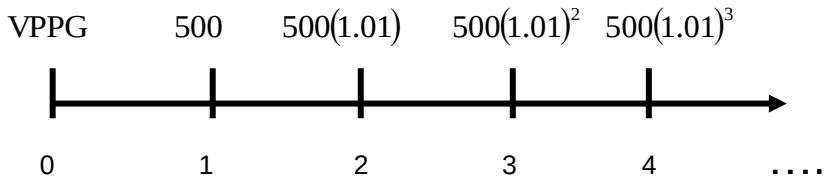
X_1 : valor del primer pago.

i : tasa efectiva de interés por periodo de pago.

n : número de pagos que se evalúan a valor presente.

Ejemplo 7.14 Calcular el valor presente de pagos mensuales perpetuos que crecen a razón del 1% mensual, utilizando una tasa de interés del 2% mensual. El primer pago es de $500.

En el siguiente diagrama se muestran sólo 4 pagos de la perpetuidad.



Como las tasas de crecimiento y de interés son mensuales, se puede utilizar directamente la fórmula de perpetuidad. Planteando y resolviendo:

$$\text{VPPG} = \frac{500}{0.02 - 0.01} = 50{,}000$$

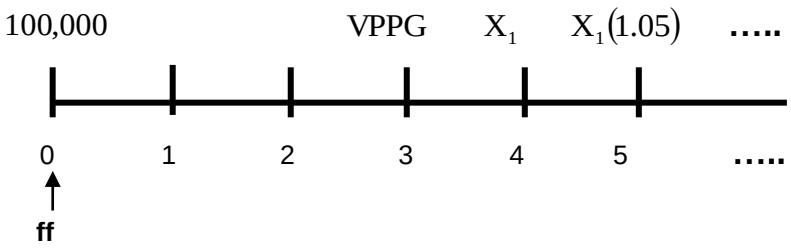
Este ya es el valor presente evaluado un periodo antes del primer pago.

Ejemplo 7.15 Un préstamo de $100,000 se va a pagar con pagos anuales crecientes a una tasa del 5% anual, y cobrando una tasa del 1% mensual. Calcular el valor del primer pago si éste se efectúa a los 4 años.

En primer lugar, se debe notar que la tasa de interés es mensual y se requiere una tasa anual. La tasa anual es:

$$i_a = (1.01)^{12} - 1 = 0.1268$$

El diagrama de tiempo podría ser:



Como el primer pago se realiza en el año 4 entonces el valor presente de la perpetuidad se evalúa en el año tres. Planteando:

$$100.000 = \text{VPPG}(1.1268)^{-3} = \frac{X_1}{0.1268 - 0.05}(1.1268)^{-3}$$

Despejando el valor del primer pago se tiene:

$$X_1 = 10{,}991.89$$

El primer pago es de $10,991.89 que debe realizarse en el año 4.

CASO DE ESTUDIO

Las Udis.

Las unidades de inversión o udis comenzaron a operar el 4 de abril de 1995. En el diario oficial de la federación aparece publicado el 1º. de abril de 1995 el procedimiento para el cálculo de las udis, que puede ser consultado en la siguiente dirección electrónica:

www.banxico.org.mx/tipo/disposiciones/OtrasDisposiciones/UDIS.htm

En este decreto se establece que el valor de una udi al 4 de abril de 1995 fue de un peso, y que el valor de esta, se irá incrementando conforme a las variaciones del índice de precios al consumidor (IPC).

Las udis son un esquema que se ideó para proteger a los prestamistas de las variaciones de la inflación; las udis, por tener ya incorporado el valor de la inflación en su precio, "mantienen el poder adquisitivo" del inversionista que decide utilizarlas, y regularmente ganan una tasa de interés extra, que es una tasa real.

Para determinar el valor de una udi en una fecha específica, se requiere conocer el cambio porcentual del IPC, por ejemplo: la udi al 5 de abril de 1995 tenía el valor de un peso, para determinar el valor de una udi al 1o. de enero de 1996 se debe conocer el cambio del IPC entre estas dos fechas, lo que es equivalente a calcular la inflación del periodo. Como la inflación presentada entre el 5 de abril de 1995 y el 1o. de enero de 1996 fue del 33.91% entonces el valor de la udi al 1o. de enero de 1996 es:

$$\text{Valor} = (1)(1.3391) = 1.3391$$

Para calcular el valor de la udi al 1o. de enero de 1997 se necesita conocer la inflación del 1o. de enero de 1996 al 1o. de enero de 1997 que fue de 27.91%. Este factor debe ser aplicado al valor de la udi al 1o. de enero de 1996. De esta forma tenemos:

$$\text{Valor} = (1.3391)(1.2791) = 1.7129$$

Continuando con este procedimiento se pueden calcular los valores de las udis para cada día. En la tabla 7.1 se muestran los valores anuales de las udis al 1o. de enero de cada año.

Tabla 7.1

Fecha	Valor de la udi
1o. Abril 1995	1.0000
1o. Enero 1996	1.3391
1o. Enero 1997	1.7129
1o. Enero 1998	2.0012
1o. Enero 1999	2.3640
1o. Enero 2000	2.8849
1o. Enero 2001	2.9104
1o. Enero 2002	3.0555
1o. Enero 2003	3.2262
1o. Enero 2004	3.3524
1o. Enero 2005	3.5350
1o. Enero 2006	3.6384
1o. Enero 2007	3.7898
1o. Enero 2008	3.9334
1o. Enero 2009	4.1855

Fuente: www.sat.gob.mx/

Veamos un ejemplo:

El 1o. de enero del 2008 un inversionista decide invertir en udis la cantidad de $50,000 y se le promete pagar una tasa de interés del 3% anual, ¿qué cantidad le será devuelta en pesos?

En primer lugar, se deben "cambiar" los $50,000 a udis. El 1o. de enero del 2008 la udi tenía un valor de 3.9334 según la tabla 7.1. entonces $50,000 tienen un valor en udis de:

$$\text{Udis} = \frac{50{,}000}{3.9334} = 12{,}711.65$$

Esto quiere decir que se van a invertir 12,711.65 udis al 3% anual. Al 1o. de enero del 2009 se van a tener:

$$M = (12{,}711.65)(1.03) = 13{,}093 \text{ udis}$$

Finalmente, para saber la cantidad en pesos que le serán devueltas al inversionista se debe conocer el valor de la udi al 1o. de enero del 2009. En este caso:

$$13{,}093 \text{ udis} = (13{,}093)(4.1855) = 54{,}800.74 \text{ pesos}$$

En principio, parece que la tasa de interés es muy baja, pero la udi ya tiene integrada la inflación por lo que la tasa nominal que recibe el inversionista es:

$$i = \frac{54{,}800.74 - 50{,}000}{50{,}000} = 0.096 = 9.6\%$$

De este 9.6% que recibe el inversionista, el 3% es una ganancia real. La ventaja de este sistema es que este 3% se puede saber por anticipado, independientemente de la inflación que se pueda presentar, ya que ésta se va a incorporar directamente al valor de la udi.

Para el caso de un préstamo que se va a liquidar con una anualidad con udis, se podría modelar de la siguiente manera:

El 1o. de enero de 1998 se prestan $90,000 que serán convertidos a udis, para ser liquidados con 10 pagos anuales a una tasa del 5% anual. Calcular el valor en udis de cada pago, y el valor en pedos de los pagos 5 y 10.

De acuerdo a la tabla 7.1 se tiene que el valor de una udi es de $2 (se aproximó para facilitar los cálculos) para el 1o. de enero de 1998, por lo que en realidad se prestan 45,000 udis. Para encontrar el valor de los pagos anuales, las udis se trabajan con una anualidad como se ha venido haciendo:

$$45{,}000 = X\frac{\left[1-(1.05)^{-10}\right]}{0.05}$$

Tanto los 45,000 como el valor de X están denominados en udis, y despejando el valor de X se tiene:

$$X = 5{,}827.71$$

El valor que se debe estar pagando anualmente es de 5,827.71 udis. Para saber lo que se debe pagar en pesos, sólo resta conocer el valor de la udi al momento del pago. Como el pago 5 se efectúa el 1o. de enero del 2003 se tiene:

$$\text{Pago}_{2003} = (5{,}827.71)(3.2262) = 18{,}801.34$$

Y el pago 10 estaría dado por:

$$\text{Pago}_{2008} = (5{,}827.71)(3.9334) = 22{,}922.70$$

Una anualidad creciente podría servir para modelar una anualidad que se paga con udis, siempre y cuando la inflación fuera constante, y el crecimiento de los pagos fuera igual a la inflación. La tasa de interés que debería ser considerada en la anualidad creciente sería la tasa nominal que resulta de la siguiente operación:

$$i_n = (1 + i_r)(1 + \pi) - 1$$

Donde i_r es la tasa que se cobraría en la udis o tasa real, y π es la inflación que se supondría constante para todo el periodo del préstamo.

Ejercicios

7.2 Anualidades que crecen como progresión geométrica.

1 Un crédito hipotecario de $500,000 se va a liquidar con 240 pagos mensuales creciendo a una tasa del 0.8% mensual. Si la tasa de interés es del 1.4% mensual, calcular el valor del primer y del último pago.

2 Vas a invertir en un negocio $20,000 y crees que vas a recibir 8 pagos anuales que experimentarán un crecimiento anual del 13%. Si deseas ganar una tasa de interés del 10% y tu primer pago lo vas a recibir a los 5 años, ¿cuál debe ser el valor del primer pago?

3 Vas a ahorrar de forma trimestral durante 5 años. Tus depósitos serán crecientes a una tasa del 2.5% trimestral y la tasa de interés que ganarás será del 12% convertible trimestralmente. Calcular el valor acumulado de todos los depósitos, si el primer depósito es de $780.

4 Vas a comprar una motocicleta que tiene un precio de $19,500 con 12 pagos mensuales vencidos crecientes. La tasa de interés y la tasa de crecimiento son iguales y tienen un valor del 1.5% mensual. Calcular el valor del primer y del último pago.

5 Un escritor va a recibir regalías por un libro los próximos 10 años. El primer año recibirá $23,000 y año con año éstas crecerán un 7%. Si el escritor recibiera las regalías de estos 10 años donde los pagos sean iguales y se asume que la tasa de interés es del 9% anual, determinar el valor de los pagos nivelados.

6 Al comprar una maquinaria de $200,000 se realizarán 36 pagos mensuales que experimentarán un crecimiento mensual del 0.5% mensual. La tasa de interés es del 1.7% mensual, calcular:

a) el valor del primer pago.

b) el saldo insoluto una vez que se efectúa el pago 10.

c) los intereses pagados por el pago 27.

7 Se compró una casa hace 5 años donde el primer pago fue de $3,700. Ya se han efectuado 60 pagos mensuales y faltan por realizarse 120 pagos mensuales. El crecimiento de los pagos es del 0.6% mensual y la tasa de interés cobrada es del 1.4% mensual. Calcular el saldo insoluto en este momento.

8 Por una deuda de $60,000 se han realizado 25 pagos crecientes bimestrales a razón del 2.1% bimestral. El pago 25 fue de $4,116.782. La tasa de interés cobrada es del 3% bimestral, calcular el saldo insoluto al momento de efectuar el pago 25.

7.3 Casos más generales de anualidades que crecen como progresión geométrica.

9 Por una recámara con valor de $20,000 se efectuarán 12 pagos mensuales creciendo a razón del 2% mensual y un pago final de $5,000 en el mes 13. Si la tasa de interés es del 1.5% mensual, calcular el valor del pago 12.

10 Se quieren tener $72,000 dentro de 5 años, por lo que se van a realizar 18 depósitos bimestrales crecientes, comenzando dentro de un mes. El crecimiento bimestral de los pagos es del 1% mientras que la tasa de interés es del 8% anual. Calcular el valor del primer depósito asumiendo que al realizar el último, se dejará que el dinero acumulado siga generando intereses.

11 Te prestan $46,335.69 que vas a pagar con 6 pagos anuales creciendo al 12% anual. El primer pago es por $12,000, calcular la tasa de interés anual que se cobró. Usar las tasas del 23% y 24% para la interpolación.

12 Compras una recámara con un precio de $14,300. Realizarás 24 pagos crecientes donde el primer pago lo vas a realizar en el mes 4. Si el primer pago es de $800 y el crecimiento es del 0.5% mensual, calcular la tasa de interés mensual interpolando entre el 2.2% y el 2.4%.

13 Deseas comprar una casa con valor de $580,000 por lo que te ofrecen un plan con un enganche de $80,000, y pagos mensuales durante 10 años. La tasa de interés que te cobran es del 1.3% mensual y deseas que tu primer pago sea de $4,500. ¿De cuánto debe ser el crecimiento mensual del pago? Interpola utilizando tasas de crecimiento del 1.1% y del 1.2%

14 Calcular el valor presente de 20 pagos trimestrales vencidos donde los primeros 8 pagos son constantes con valor de $3,000 y los últimos 12 pagos serán crecientes a razón del 2% trimestral. El primer pago de los pagos crecientes es de $5,000. Utiliza una tasa del 5% trimestral para todos los pagos.

15 Tienes $100,000 en un fondo y vas a realizar 5 retiros anuales creciendo a razón del 10% anual. La tasa que te ofrece el fondo es del 8% anual. Calcula el valor del primer retiro si deseas que al momento de efectuar el último queden en el fondo $15,000.

16 Un préstamo de $90,000 se va a liquidar con 12 pagos trimestrales creciendo a razón del 1% trimestral y cobrándose una tasa de interés del 4.2% trimestral. Calcular el abono a capital del pago 7.

7.4 Perpetuidades

17 Para pagar un préstamo de $35,000 se van a efectuar pagos anuales perpetuos que crecerán a razón del 5% anual. La tasa que se cobra es del 17%. Determinar el valor del primer pago.

18 Una acción promete pagar dividendos trimestrales crecientes de por vida. Si el primer dividendo es de $150 y el crecimiento es del 1.8% trimestral, calcular el valor presente de todos los dividendos utilizando una tasa de interés del 3%. El valor presente es el precio que se estaría dispuesto a pagar por la acción.

19 Calcular el valor del primer pago de una perpetuidad anual creciente, si se desea pagar una deuda de $30,000, donde la tasa de interés es del 10% anual y el crecimiento de los pagos es del 15% anual.

20 Se sabe que el valor presente de una perpetuidad creciente es de $13,948. Los pagos crecen a razón del 5% bimestral y el primer pago se efectúa a los 9 meses. Calcular el valor del primer pago si se considera una tasa del 6% bimestral.

Problemas tipo examen

1 Para pagar una deuda se van a realizar 24 pagos mensuales creciendo al 1% mensual. La tasa que se cobra es del 30% convertible mensualmente. Si el último pago es de $4,400.07, determinar el valor de la deuda.

2 Has realizado 32 depósitos trimestrales tal que éstos tuvieron un crecimiento del 3% trimestral. Después del último depósito has dejado tu dinero para que gane intereses durante 5 meses ya sin realizar depósito alguno. Si la tasa de interés es del 2% trimestral y hasta el momento en tu cuenta tienes $85,645.60, calcular el valor del primer y del último depósito.

3 Solicitas un crédito de $450,000 que te lo van a aplicar en udis. Vas a realizar 10 pagos semestrales iguales y te van a cobrar una tasa del 8% anual sobre las udis. Si una udi vale el día de hoy $3.00 y asumes que la inflación se mantendrá constante y será del 5% anual, calcular el valor del primer y del último pago en pesos. Este ejercicio lo puedes realizar con udis como en el caso de este capítulo o bien como una anualidad creciente.

4 Calcular el valor presente de 40 pagos trimestrales crecientes. Los primeros dos pagos son iguales y valen $500, los pagos 3 y 4 crecen un 10% y valen $550; los pagos 5 y 6 crecen un 10% y valen $605 y así sucesivamente. Nótese que los incrementos se efectúan cada dos pagos y que en total hay 20 crecimientos. Asuma una tasa de interés del 15% semestral.

5 Una joyería vende collares. De acuerdo a sus proyecciones, el dueño piensa que el siguiente año venderá 100 collares con un valor cada uno de $3,500. Si supone que el número de collares vendidos se incrementará anualmente en un 3% y que el precio se incrementará en un 5%, determinar el valor presente de las ventas, asumiendo que son una perpetuidad. Utilice una tasa de interés del 23% anual.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

Capítulo 1

1 a) Sí b) No

3 M = $10,500, I = $500

4 M = $67,200, I = $7,200

5 D = $2,000, M = $2,070

6 $240

7 $1,625

8 $7.50

9 a) $3,584 b) 3,648 c) Hoy

10 $210

11 10%

12 2.77%

13 12%

14 1.875%

15 5.56%

16 Los $800 de hoy

17 Con los $10,000 del año pasado

18 -1.4%

19 1.44%

20 -12.22%

21 10.25%

Tipo Examen

1 20%

2 El valor real disminuirá

3 C = $2,000, M = $2,200

4 Aumento del 4.35%

5 14.34%

Capítulo 2

1 $4,500

2 $30,000

3 $9,100

4 $768

5 $17,400

6 $5,551

7 $2,906.98

8 C = $49,586.78, I = $10,413.22

9 La del pagaré de $6,000

10 $1,171.17

11 $31,343.28

12 a) $480 b) $440 c) $420

13 a) $480 b) $440 c) $420

14 a) $5,400 b) $5,400

15 a) $3,800 b) $3,800

16 18.56%

17 12.5%

18 $113.33

19 a) $8,440 b) 202,560

20 $3,250

21 0.5 años ó un semestre

22 No, sólo tendrá $4,515

23 3 años y 4 meses

24 a) 183 b) $4,112.19

25 137 días

26 $26,225

27 $3,365.29

28 25 de septiembre del 2,013

29 a) 18.1% b) 27.72%

30 12.42%

31 $15,348.84

32 20 de noviembre del 2,006

33 a) $3,790.77
b) $3,794.53
c) $3,786.88

34 $6,385.28

35 435 días.

36 $33,393 y $ 38,393

37 $9,029.95

38 En la opción b).

39 44.44%

40 $13,376.42

41 $59,712.24

42 22 de mayo del 2,007

43 $17,342

Tipo Examen

1 9 de agosto

2 $4,360.47

3 La opción b)

4 $16,822.43

5 $2,209.33

Capítulo 3

1 a) $351 b) $949

2 $4,332.60

3 4.225%

4 $3,733.33

5 4.615%

6 $12,600

7 a) 7.5% b) 6.98%

8 a) 16.66% b) 28.57% c) 41.18%

9 La tasa de interés.

10 23.91%

11 La de descuento

12 $5,657.50

13 $11,567.60

14 $5,473.72

15 C = $24,942.62, M = $25,684.62

16 3.35%

17 92.5 días

18 0.79%

19 $90.39

20 a) $2,464.29 b) $164.29

21 $94,057.14

22 $5,178.49

23 $6,230

24 2 años

25 $29,147.56

26 $10

27 $1,400

28 $1,486.67

29 a) $3,040 b) 24%

30 10%

31 $2,978.72

32 $939.13

33 a) $4,200 b) $547.83

34 $3,381.64

35 $552.04

Tipo examen

1 La de descuento del 30%

2 $730

3 $7,063.65

4 a) 23.5% b) $1,234.31

5 $425.97

22 28.28%

Capítulo 4

1 a) $36,870.89
b) $196,476.09
c) $19,492.78

2 El interés compuesto ofrece un mayor monto cuando la inversión es a más de un periodo, y el simple ofrece uno mayor cuando la inversión es a menos de un periodo.

3 a) $5,876.09 b) $86.84 c) $77.09

4 a) $30,875 b) $60,892.47

5 El interés simple

6 $2,938.01

7 $4,670.84

8 $78,467.27

9 $5,743.29

10 $4,117.62

11 Un año y diez días.

12 El 24 de julio.

13 3 años, 1 mes y 8 días

14 13.137%

15 6.77%

16 El 1% mensual.

17 $2,560

18 Menor al 15%

19 $7,002.96

20 17.18%

21 a) 6.6% b) 25.86% c) 13.2%

23 Debe ser mayor al 28%

24 17.65%

25 $7,997.68 para todos los casos.

26 $2,397.72

27 $2,000.29

28 El 21 de abril

29 $5,431.58

30 $7,394.07

31 $1,339.08

32 $5,829.97

33 $3,431.42

34 23.37%

35 13.31%

36 27.68%

37 $62,322.30

38 $3,353.43

39 $1,914.54

40 La tasa del 24.8%

41 $8,041.64

42 La convertible mensualmente.

43 $6,977.98

44 $53,637.69

45 $6,125.47

46 28%

47 5 años y medio

10 $815,280.68

48 $815,280.68

49 a) $1,534,895.86
b) 25.33%
c) 25.03%

50 19.30%

51 -2.34%

52 5.68%

53 -7.4%

54 28.47%

55 31.04%

Tipo examen

1 13 de noviembre

2 -8.52%

3 a) 6.67% b) 6.71%

4 $3,685.74 y $3,788.28

5 -4.20%

Capítulo 5

1 $42,998

2 $489.69

3 $13,463.53

4 $15,014.25

5 $14,777.86

6 a) $1,797 b) $2,334 c) $3,575

7 a) $4,409 b) $4,116 c) $4,034

8 $1,368.09

9 $3,858.34

11 $6,862.68	36 15
12 $7,812.05	37 a) 9 b) $2,585.61
13 $333,877.81	38 a) 10 b) $2,509.61
14 $90,343.07	39 16 pagos. Pago extra $7,956.68
15 $1,199.17	40 a) 6 b) $1,996.42
16 $85,590.49	41 a) 6 b) $35,401.28 c) 4
17 $678.57	42 3.8% aproximadamente
18 $160,700.86	43 95.38%
19 $2,015.16	44 21.07%
20 $140,768.27	45 Comprarlo en la tienda.
21 $6,487.57	46 La institución A
22 $15,917.44	47 El plan a)
23 $459.86	48 a) 7.42% b) $40,547.23
24 $70,241.33	49 9%
25 $2,303.95	50 $28,994.85
26 $4,565.21	51 $8,926.24
27 $905,278.89	52 $7,875
28 $181,100.14	53 a) 8,069.63 b)$8,000
29 $1,553.40	54 1.31% aproximadamente
30 a) $166,726.58 b) $178,794.34	55 Sólo se pagan intereses.
31 a) $959.42 b) $952.28	56 $9,189.02
32 Verdadero	57 $2,214.65
33 Falso	58 $660.8
34 5.3929	59 a) $3,605 b) $2,045 c) $1,160
35 8	60 $6,403.09
	61 a) $759,400.43 b) 43,520.14

62 a) 19 b) $2,136.46

63 $1,766.90

64 $1,399.05

65 $8,026.64

66 5

Tipo examen

1 $16,459.51

2 a) 8 b) 82.37

3 La del enganche de $2,000.

4 $7,445.21

5 $455.08

Capítulo 6

1 $1,307.16 b)

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				$7,200.00
1	$1,307.16	$180.00	$1,127.16	$6,072.84
2	$1,307.16	$151.82	$1,155.34	$4,917.50
3	$1,307.16	$122.94	$1,184.22	$3,733.28
4	$1,307.16	$93.33	$1,213.83	$2,519.45
5	$1,307.16	$62.99	$1,244.17	$1,275.28
6	$1,307.16	$31.88	$1,275.28	$0.00
TOTAL	$7,842.96	$642.96	$7,200.00	

2

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				$25,000.00
1	$6,725.70	$750.00	$5,975.70	$19,024.32
2	$6,725.70	$570.73	$6,154.97	$12,869.35
3	$6,725.70	$386.08	$6,339.62	$6,529.73
4	$6,725.70	$195.89	$6,529.81	$0.00
TOTAL	$26,902.80	$1,902.70	$25,000.10	

3

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				$3,500.00
1	$1,457.22	$420.00	$1,037.22	$2,462.78
2	$1,457.22	$295.53	$1,161.69	$1,301.09
3	$1,457.22	$156.13	$1,301.09	$0.00
TOTAL	$4,371.66	$871.66	$3,500.00	

4

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				$12,000.00
1	$3,267.00	$420.00	$2,847.00	$9,153.00
2	$3,267.00	$320.36	$2,946.65	$6,206.36
3	$3,267.00	$217.22	$3,049.78	$3,156.58
4	$3,267.00	$110.48	$3,156.52	$0.06
TOTAL	$13,068.00	$1,068.06	$11,999.94	

5 a) $129.97 b) $2,598.46 c) $91.44 d) $2,555.77 e) $57.03

6 $3,998.24

7 $24,942.71

8 $516.3

9 $3,877.22

10 $63,256.03

11 $3,711.54

12 $2,084.85

13 En el mes 9

14 $234

15 a) $51.51 b) 27

16 $24,280

17 $469.08 b) $4,767.73 c) $7,183.52 d) $63.94

18 a) $210,021.65 b) $151,576.62

19 $9,669.63

20

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				$30,000.00
1	$0.00	$5,100.00	-$5,100.00	$35,100.00
2	$0.00	$5,967.00	-$5,967.00	$41,067.00
3	$0.00	$6,981.39	-$6,981.39	$48,048.39
4	$21,745.44	$8,168.23	$13,577.21	$34,471.18
5	$21,745.44	$5,860.10	$15,885.34	$18,585.84
6	$21,745.44	$3,159.59	$18,585.85	$0.00
TOTAL	$65,236.32	$35,236.31	$30,000.00	

21 $2,500

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
				$2,500.00
0	$649.27	$0.00	$649.27	$1,850.73
1	$649.27	$48.12	$601.15	$1,249.58
2	$649.27	$32.49	$616.78	$632.80
3	$649.27	$16.45	$632.82	$0.00
TOTAL	$1,947.81	$80.61	$2,500.00	

22

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				$17,350.00
1	$0.00	$1,735.00	-$1,735.00	$19,085.00
2	$0.00	$1,908.50	-$1,908.50	$20,993.50
3	$6,622.84	$2,099.35	$4,523.49	$16,470.01
4	$6,622.84	$1,647.00	$4,975.84	$11,494.17
5	$6,622.84	$1,149.42	$5,473.42	$6,020.75
6	$6,622.84	$602.07	$6,020.77	$0.00
TOTAL	$26,491.36	$9,141.34	$17,350.02	

23 $9,139.41

24 $11,890.58 b) $186.69

25

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				$5,000.00
1	$1,500.00	$170.00	$1,330.00	$3,670.00
2	$1,700.00	$124.78	$1,575.22	$2,094.78
3	$2,166.00	$71.22	$2,094.78	$0.00
TOTAL	$3,200.00	$294.78	$5,000.00	

26

Periodo	Depósito	Intereses	Saldo en el fondo
0			
1	$1,500.00	$0.00	$1,500.00
2	$1,500.00	$13.50	$3,013.50
3	$1,500.00	$27.12	$4,540.62
4	$1,500.00	$40.87	$6,081.49

27 a) $215,996.81 b) $33,109.97

28 a) $5,485.87 b)

Periodo	Depósito	Intereses	Saldo en el fondo
0	$1,200.00	$0.00	$1,200.00
1	$1,200.00	$36.00	$2,436.00
2	$1,200.00	$73.08	$3,709.08
3	$1,200.00	$111.27	$5,020.35
4	$0.00	$150.61	$5,170.96
5	$0.00	$155.13	$5,326.09
6	$0.00	$159.78	$5,485.87

Tipo examen

1

Periodo	Pago	Intereses	Abono a Capital	Saldo Insoluto
0				$15,302.27
1	$5,270.00	$252.49	$5,017.51	$10,284.76
2	$5,270.00	$169.70	$5,100.30	$5,184.46
3	$5,270.00	$85.54	$5,184.46	$0.00
TOTAL	$15,810.00	$507.73	$15,302.27	

2. $145,544.29

3 $192,589.18

4 $17,044.50

5 a) $14,988.75 b) $944,724.07

Capítulo 7

1 a) $3,950.84 b) $26,531.19

2 $3,657.45

3 $26,129.19

4 $1,649.38 y $1,942.88

5 $30,293.31

6 a) $6,901.80
b) $160,531
c) $1,245.84

7 $408,666.8

8 $11,047.69

9 $1,625.30

10 $2,825.41

11 23.4751% aproximadamente

12 2.35% aproximadamente

13 1.1894% aproximadamente

14 $52,531.70

15 $18,689.76

16 $7,598

17 $4,200

18 $12,500

19 No puede ser calculado

20 $171.03

Tipo examen

1 $68,843.72

2 $1,200 y $3,000.10

3 $56,633.46 y $70,538.29

4 $12,205.24

5 $2,356,902.36